傅立叶变换公式

傅立叶正变换公式

$$F(\omega) = FT[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

傅立叶反变换公式

$$f(t) = FT^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$F(\omega)$称为$f(t)$的频谱，

$f(t)$称为$F(\omega)$的原函数。

§3.4常用非周期信号的频谱

1。矩形脉冲信号

已知矩形脉冲信号g(t),其表示式为

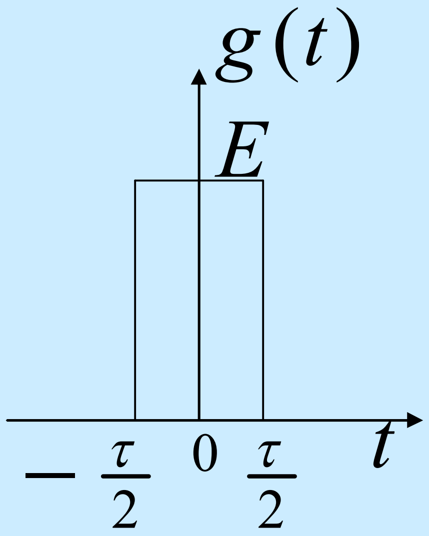
$$g(t)=\begin{cases} E & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

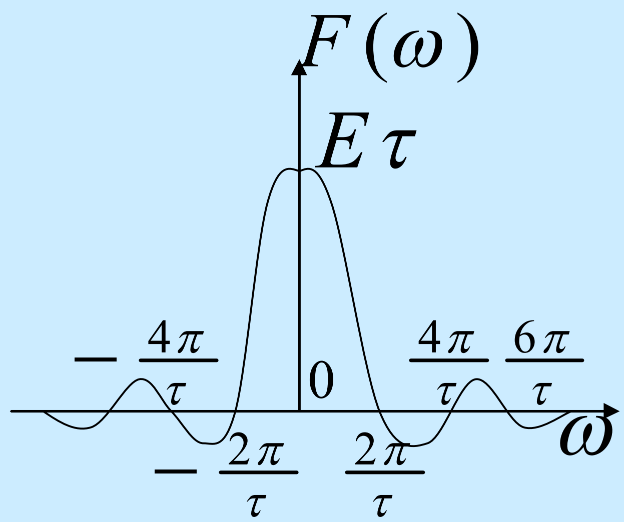
其中，E为脉冲幅度， τ 为脉冲宽度。

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ee^{-j\omega t}dt$$

$$= \frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}$$

$$= E\tau S_a\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$





因为$F(\omega)$为一实函数,通常可用一条$F(\omega)$曲线同时表示幅度谱及相位谱.

其幅度谱和相位谱分别为

$$\left|F(\omega)\right| = E\tau\left|S_a\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right|$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & \frac{4n\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} \\ \pi & \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+2)\pi}{\tau} \end{cases}$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

2.单边指数信号

- 设单边指数函数表示式为

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0, \alpha > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- 或写作

$$f(t) = e^{-\alpha t} u(t) \qquad \alpha > 0$$

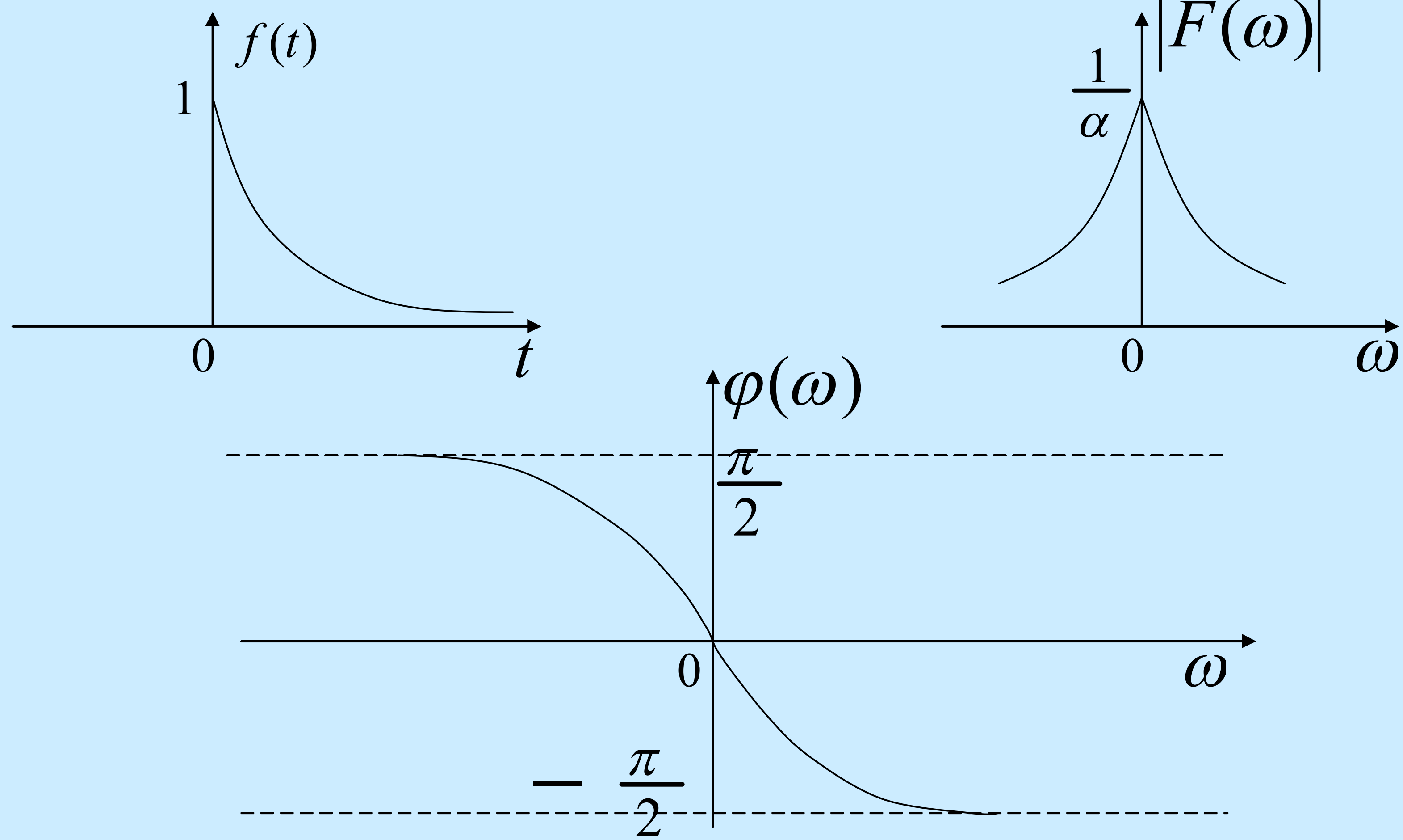
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt$$

得

$$F(\omega)=\frac{1}{\alpha+j\omega}=\left|F(\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

其中

$$\begin{cases} \left|F(\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^{2}+\omega^{2}}} \\ \varphi(\omega)=-arctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \end{cases}$$



- 单边指数信号的波形$f(t)$,幅度谱$|F(\omega)|$及相位谱$\varphi(\omega)$如图所示。

3.双边奇指数信号

- 已知双边奇指数信号表示式为

$$f(t)=\begin{cases} -e^{\alpha t} & t>0 \\ e^{-\alpha t} & t<0 \end{cases}$$

- 其中$\alpha>0$，频谱函数为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0} -e^{\alpha t}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt$$

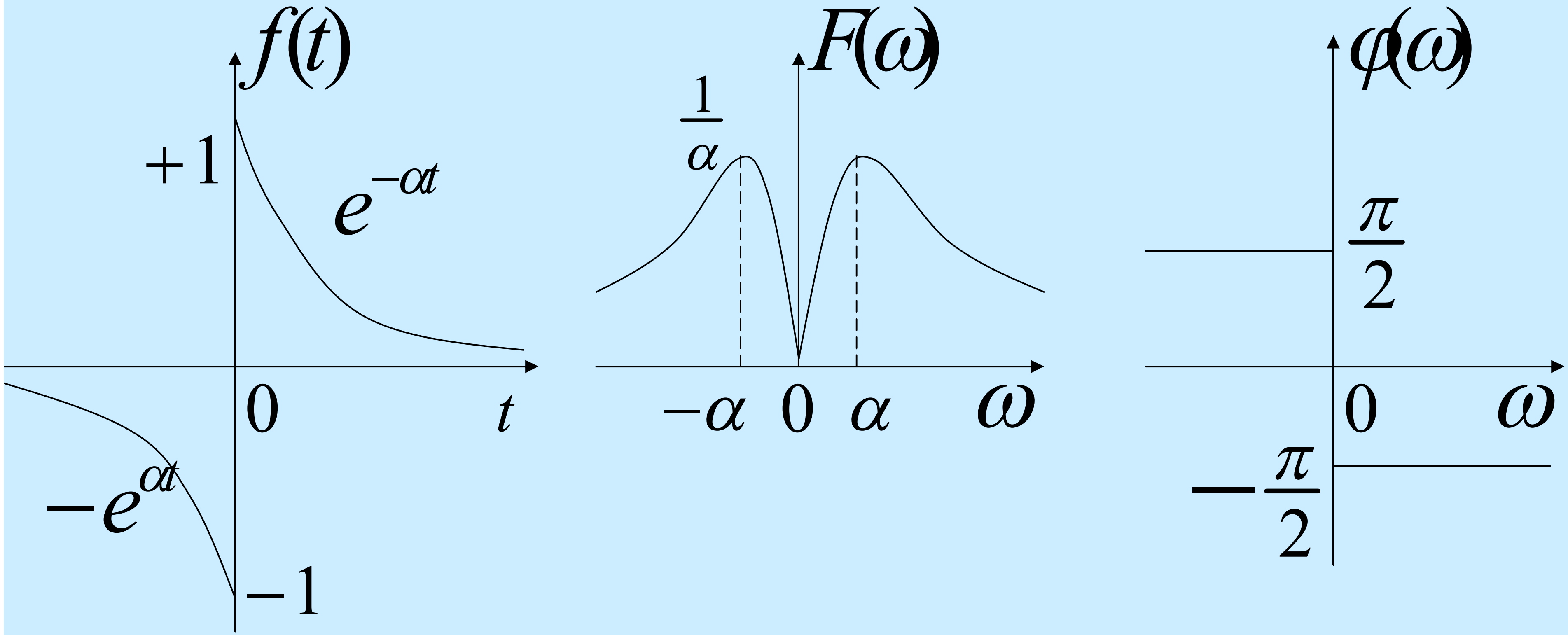
$$F(\omega)=-\frac{1}{\alpha-j\omega}+\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

$$=-j\frac{2\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

- 其幅度谱及相位谱为

$$\left|F(\omega)\right|=\frac{2|\omega|}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \omega<0\\ -\dfrac{\pi}{2} & \omega<0\end{cases}$$



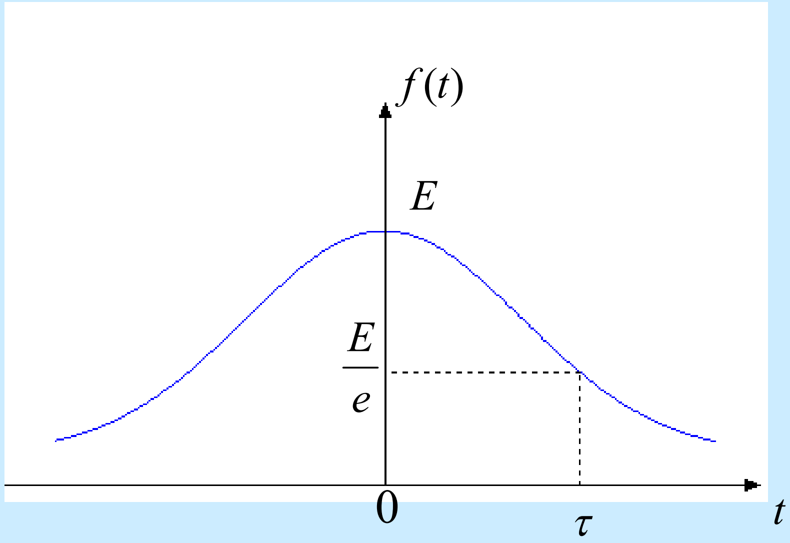
上图为双边奇指数信号的幅度谱及相位谱

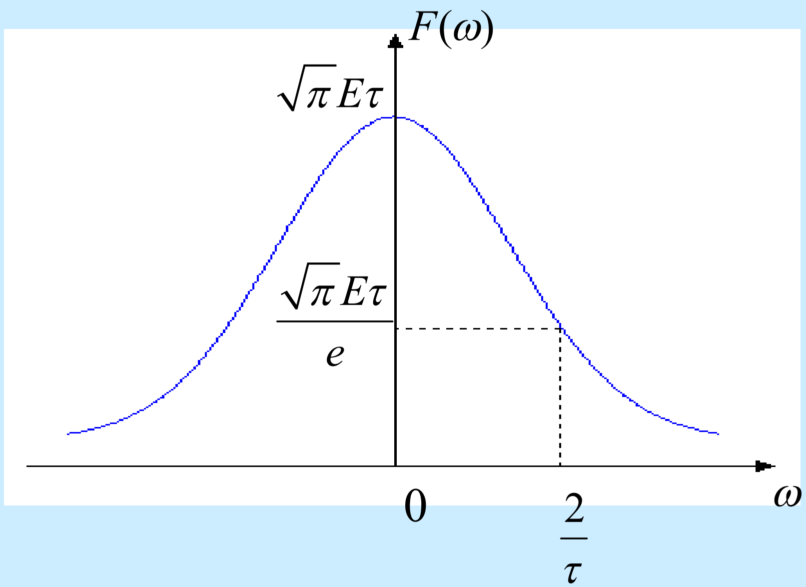
5 钟形脉冲的频谱

$$f(t) = Ee^{-(\frac{t}{\tau})^2} \quad -\infty < t < \infty$$

其频谱仍然是钟形信号

$$F(\omega) = \sqrt{\pi} E\tau e^{-(\frac{\omega\tau}{2})^2}$$





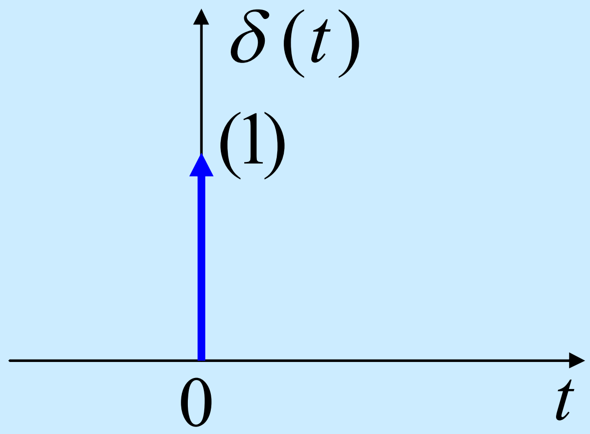
§3.4奇异函数的傅立叶变换
Fourier transform of singularity signals

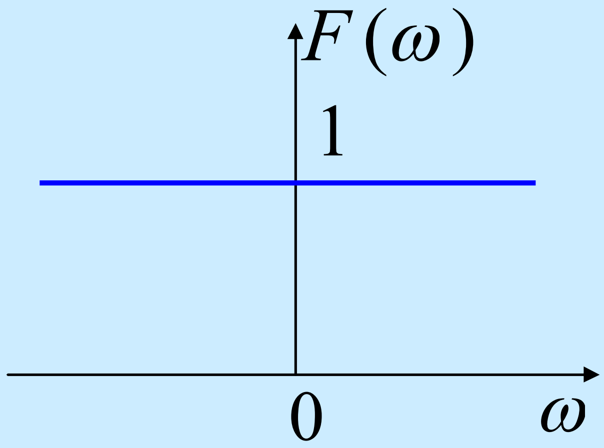
1.Impulse signal 单位冲激函数

单位冲激函数的傅立叶变换为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt$$

由冲激函数的抽样特性可知，上式右边积分为1，故 $F(\omega)=1$。





- 单位冲激函数的频谱在整个频率域内等于一个常数.
- 在整个频率域中频谱是均匀的，这个频谱常被称为“均匀谱”或“白色谱”。

2. Unit direct current signal 单位直流信号

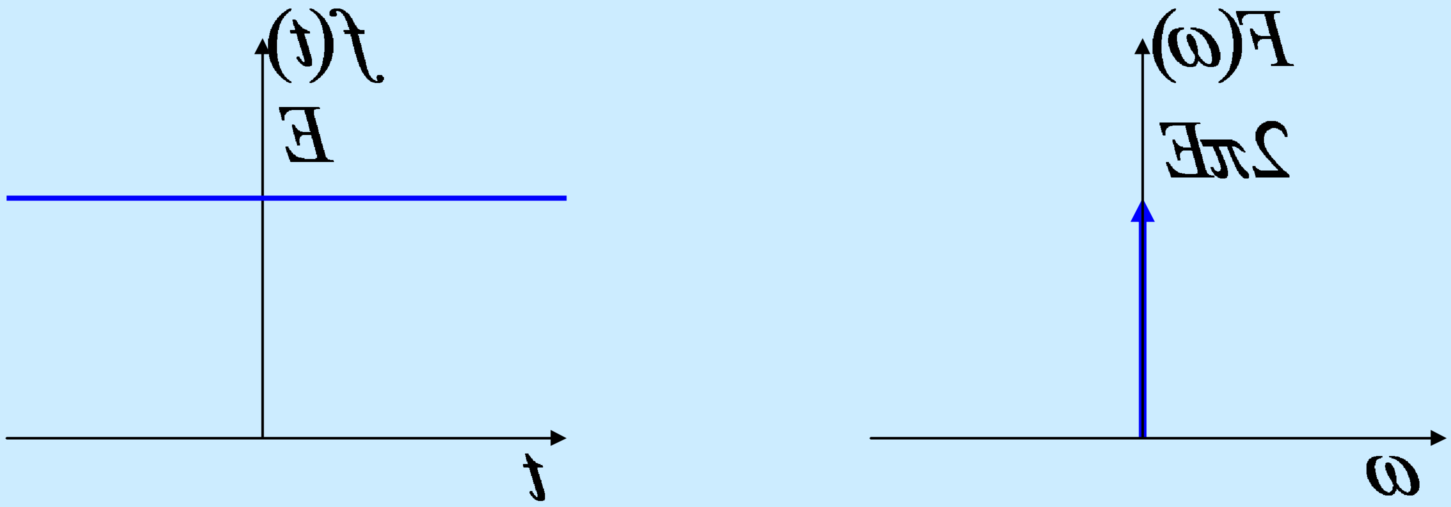
$$f(t) = 1 \qquad -\infty < t < \infty$$

$$FT^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}$$

$$FT[1] = F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$



单位直流信号及其频谱

•直流信号的傅立叶变换是位于$\omega = 0$的一个冲激函数。

3.Sgn(t) 符号函数

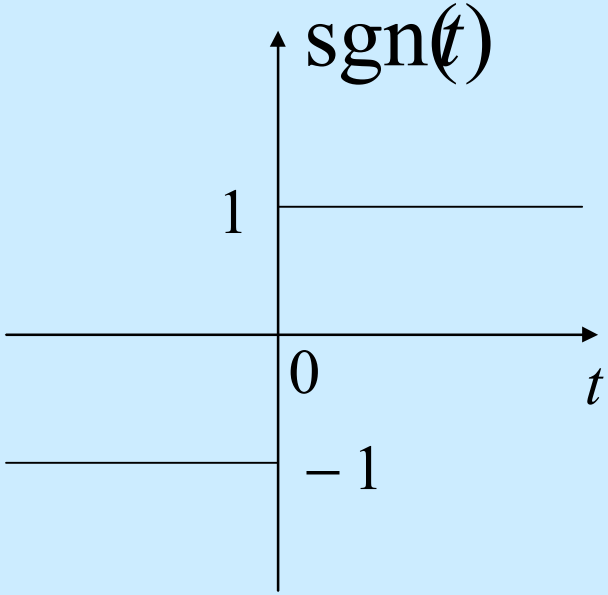
符号函数定义为

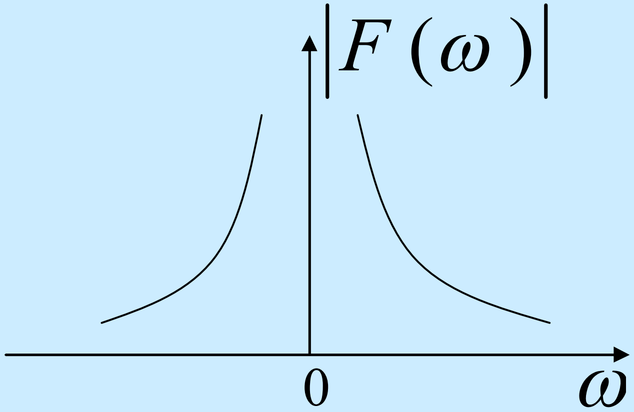
$$\text{sgn} = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases}$$

将sgn(t)看成是双边奇指数函数当$\alpha \to 0$时的极限，那么它的频谱应该是双边奇指数函数当$\alpha \to 0$ 时的极限，即

$$F(\omega) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega}$$

$$
\begin{cases}
\left|F(\omega)\right| = \dfrac{2}{|\omega|} \\[2ex]
\varphi(\omega) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \omega > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \omega > 0 \end{cases}
\end{cases}
$$





4.Unit step 单位阶跃函数

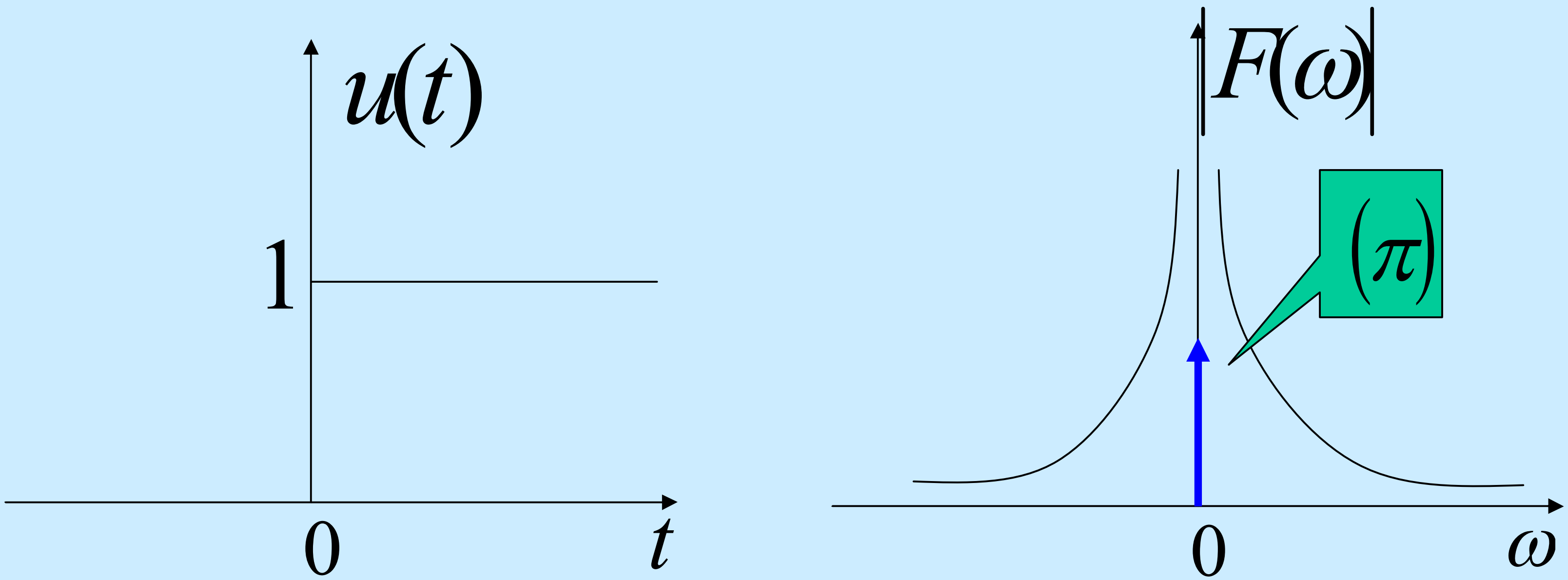
单位阶跃函数可以看作是直流信号与符号函数的叠加，即

$$u(t) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$$

两边进行傅立叶变换，则有

$$F(\omega) = FT\left[\tfrac{1}{2}\right] + FT\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\right]$$

$$= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



可以看出，在u(t)的频谱中除了包含在$\omega=0$的冲激函数外，还有许多高频分量。

5. Unit doublets 单位冲激偶

单位冲激偶的傅立叶变换：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=-(e^{-j\omega t})'\big|_{t=0}=j\omega$$

同理：

$$FT[\delta^{(n)}(t)]=(j\omega)^{n}$$

HW: 8, 9, 13(2) (3)

$$f(t)=1 \qquad -\infty<t<\infty$$

$$f(t)=\lim_{\tau\to\infty} g_\tau(t)$$

$$F(\omega)=\lim_{\tau\to\infty}\tau S_a\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\boxed{\delta(t) \;=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\pi}Sa(kt)}$$

$$\boxed{\delta(\omega) \;=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\pi}Sa(k\omega)}$$

令$k=\frac{\tau}{2}$

$$\boxed{\delta(\omega) \;=\lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{2\pi}Sa(\frac{\omega\tau}{2}) = \frac{F(\omega)}{2\pi}}$$

$$FT[1]=F(\omega)=2\pi\delta(\omega)$$