

---

## 第四章 傅里叶变换在系统分析中的应用

### 4.1 学习要求

通过本章的学习，学生应重点掌握系统函数  $H(j\omega)$  的意义及其在系统分析中的作用；无失真传输条件和理想低通滤波器的概念及其物理不可实现性；希尔伯特变换及系统函数的约束特性；与傅里叶变换相关的基本通信原理和技术。

### 4.2 内容概述

#### 4.2.1 线性时不变系统的频率响应 $H(j\omega)$

如果 LTI 系统的单位冲激响应为  $h(t)$ ，激励为  $f(t)$ ，其零状态响应  $y(t) = f(t) * h(t)$ ，根据傅里叶变换的卷积特性有  $Y(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega)$ 。

定义描述 LTI 系统的频率响应  $H(j\omega)$  为

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = FT[h(t)] \quad (4-1)$$

系统的频率响应(简称频响)，是系统输出与输入的傅里叶变换之比，也就是系统冲激响应的傅里叶变换， $H(j\omega)$ 与 $h(t)$ 构成一对傅里叶变换对。实际上，频率响应 $H(j\omega)$ 反映了 LTI 系统对不同频率的信号所起的作用。

#### 4.2.2 系统的无失真传输

(一) 无失真传输条件

设激励为  $f(t)$ ，响应为  $y(t)$ ，则按照定义，无失真传输的条件是

$$y(t) = Kf(t - t_0) \quad (4-2)$$

式中  $K$  为常数， $t_0$  为滞后时间。满足上式的系统，其输出信号的幅度是输入信号的  $K$  倍，并延时  $t_0$  出现，但波形不变。

满足无失真传输系统的频响应为

$$H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = K \\ \varphi(\omega) = -\omega \cdot t_0 \end{cases} \quad (4-3)$$

可见, 要使信号通过线性系统时不产生失真, 则要求在信号的全部频带内, 系统频响的幅频特性为一常数, 相频特性是一过原点的直线。

### (二) 线性系统引起的信号失真

不满足无失真传输条件的系统, 将引起输入信号的传输失真, 分为两种:

(1) 幅度失真: 系统对信号不同频率分量产生不等的幅度衰减, 使响应中各频率分量的幅度相对于激励发生变化。

(2) 相位失真, 即系统对信号不同频率分量产生的相移与频率不成正比, 使响应的各频率分量在时间轴出现的位置不同。

系统的幅度失真和相位失真可能同时存在。信号通过线性系统产生的幅度失真和相位失真均不会产生新的频率分量, 属于线性失真。

## 4.2.3 理想低通滤波器

### (一) 理想低通滤波器

#### 1. 理想低通滤波器

理想滤波器通带内的幅频特性均满足无失真传输特性, 而且其通带和阻带之间具有明显的界线, 但这种滤波器实际上是不可实现的。

理想低通滤波器的频率响应定义为

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \quad (4-4)$$

其中

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \\ \varphi(\omega) = -\omega \cdot t_0 \end{cases}$$

#### 2. 理想低通滤波器的冲激响应

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t-t_0)] \quad (4-5)$$

是一个延时采样函数。

#### 3. 理想低通滤波器的阶跃响应

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx \quad (4-6)$$

上式中  $\frac{\sin x}{x}$  的积分称为“正弦积分”, 用  $Si(y)$  表示为:  $Si(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx$ 。阶跃响应上升时间与系统的带宽(截止频率)成反比。

(二) 物理可实现滤波器频率响应的约束条件

1. 佩利—维纳准则

如果一个因果系统的幅频特性平方可积, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty$$

则对于幅频特性, 物理可实现系统的必要条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|H(j\omega)||}{1+\omega^2} d\omega < \infty \quad (4-7)$$

上式称为佩利—维纳(Paley-Wiener)准则。

佩利—维纳准则要求物理可实现的幅频响应的衰减不能太快。

佩利—维纳准则只对幅频特性提出要求, 对相频特性没有限制, 实际上物理可实现系统的幅频特性和相频特性之间是存在相互制约关系的, 因而该准则仅为必要条件而不是充分条件。对于物理可实现系统, 允许 $|H(j\omega)|$ 在某些不连续的频率点上为零, 但不允许在一个有限频带内为零。

2. 希尔伯特变换

因果系统的冲激响应 $h(t)$ 在 $t < 0$ 时为零, 仅在 $t > 0$ 时存在, 因此可以写为

$$h(t) = h(t)u(t) \quad (4-8)$$

设系统的频响 $H(j\omega)$ 用实部和虚部表示为

$$H(j\omega) = FT[h(t)] = R(j\omega) + jX(j\omega) \quad (4-9)$$

其中,

$$\begin{aligned} R(j\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \\ X(j\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \end{aligned} \quad (4-10)$$

式(4-10)称为希尔伯特变换对。它表明因果系统频响的实部 $R(j\omega)$ 被已知的虚部

$X(j\omega)$ 完全确定, 而虚部也被已知的实部完全确定。从这一关系可知, 物理可实现系统频响的实部和虚部具有满足希尔伯特变换对的相互依赖关系。在设计一个实际滤波器时, 若给定了实部, 而虚部任意给定, 则设计的滤波系统可能就是非因果的。

#### 4.2.4 调制与解调

##### (一) 调制的物理意义

调制是指用一个信号去改变或控制另一个信号的某一参量(幅度、频率或相位)的过程, 分别为调幅、调频和调相。其中控制信号称为调制信号, 而被控制信号称为载波, 调制后的信号称为已调信号。

解调是从已调信号中恢复调制信号的过程, 分别有检波、鉴频和鉴相。

##### 1. 双边带幅度调制(DSB)与解调

$f(t)$  为调制信号, 载波为正弦信号  $c(t) = \cos \omega_0 t$ , 其中  $\omega_0$  为载波角频率, 则已调信号

$f_c(t)$  是调制信号与载波的乘积

$$f_c(t) = f(t)c(t) = f(t)\cos \omega_0 t$$

取傅里叶变换得

$$\begin{aligned} FT[f_c(t)] &= F_c(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2}[F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)] \end{aligned} \quad (4-11)$$

其中  $F(\omega)$  为  $f(t)$  的傅里叶变换, 设其频谱占据  $-\omega_m$  到  $\omega_m$  的有限频带, 则已调信号的频谱  $F_c(\omega)$  是原信号频谱幅度减半, 并分别向左、右各平移  $\omega_0$ 。在  $F_c(\omega)$  的频谱中, 从  $\omega_0$  到  $\omega_0 + \omega_m$  及其关于纵轴对称部分的频谱称为上边带信号, 而  $\omega_0 - \omega_m$  到  $\omega_0$  及其对称部分频谱称为下边带信号, 所以称为双边带调制。

解调是从已调信号  $f_c(t)$  中恢复  $f(t)$  的过程。若传输信道理想, 则已调信号  $f_c(t)$  在传输过程中无失真, 在接收端  $f_c(t)$  作为解调器的输入。同步解调的原理是在接收端用与发射端同频同相的载波  $\cos \omega_0 t$  去乘以接收到的已调信号  $f_c(t)$ , 再通过一理想低通滤波器, 从而恢复出原始调制信号  $f(t)$ 。

##### 2. 幅度调制(AM)与解调

AM 调制是在发射信号中加入一定强度的载波信号  $A_0 \cos \omega_0 t$ , 则已调信号变为

$$f_c(t) = [A_0 + f(t)]\cos \omega_0 t \quad (4-12)$$

---

其频谱

$$F_c(\omega) = A_0\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2}[F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$$

设  $K$  为  $f(t)$  的最大幅度值, 为满足  $A_0 + f(t)$  总为正, 要求  $A_0 > K$ 。一般定义调幅指数  $m$  为

$$m = \frac{K}{A_0} \quad (4-13)$$

如果调幅指数  $m > 1$ , 则已调波的包络不再与调制信号形状相同, 也就不能用包络检波器解调出调制信号。当  $m < 1$ , 且调制信号  $f(t)$  的频率比载波频率  $\omega_0$  小很多时, 就可以利用包络检波器恢复出调制信号  $f(t)$ 。

### 3. 单边带调制(SSB)和残留边带调制(VSB)

单边带(single side-band)调制, 就是只产生一个边带, 而抑制另一个边带的调制方式。使已调信号通过一带通滤波器, 就可以得到单边带调制信号, 但单边带调制信号的滤波器实现较困难。

残留边带(vestigial side-band)信号不是将一个边带完全抑制, 而是部分抑制, 使其残留一小部分信号的调制方式, 其滤波器的设计可以简化, 使得下边带大部分通过, 而使上边带小部分残留。当然, 也可以用带通(或高通)滤波器使上边带大部分通过, 而下边带小部分残留。

## 4.2.5 频分多路复用和时分多路复用

### (一) 频分多路复用(FDM)

在发送端将各路信号的频谱搬移到各不相同的频段范围, 使得他们互不重叠, 这样就可复用同一信道传输。在接收端再利用若干带通滤波器将各路信号分离, 并用解调技术将各路信号被搬移过的频谱再搬回到他们各自原来的频段上, 这样各路原始信号就被还原了。

### (二) 时分多路复用(TDM)

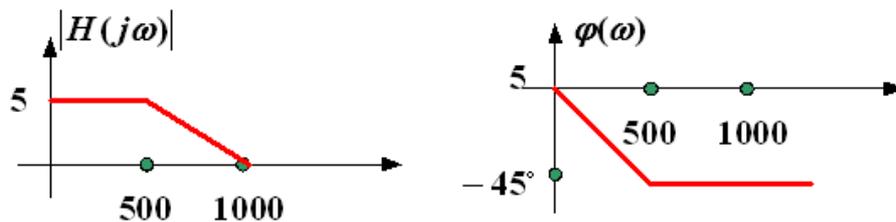
时分复用的理论依据是抽样定理, 连续信号被抽样后, 它的传送可通过抽样值的传送来代替。抽样间隔最大可达  $1/2f_m$ 。在传送抽样值时, 信道仅在抽样瞬间被占用, 而在其余的空闲时间内可传送第二路、第三路.....等其他各路信号的抽样值。将各路信号的抽样值有序的排列起来, 就可实现时分复用。在接收端, 这些抽样值由适当的同步检测器分离。

## 4.3 本章知识点

- (1) 系统的频率响应
- (2) 无失真传输
- (3) 理想低通滤波器
- (4) 调制与解调
- (5) 多路复用

#### 4.4 例题

例 4-1: 一线性系统频率特性曲线如下图所示, 求下列信号通过此系统是否发生线性失真。



例 4-1 图

1)  $e(t) = \cos(400t) + 3 \cos(600t)$

2)  $e(t) = 3 \cos(100t) \cos(300t)$

解:

1)  $e(t) = \cos(400t) + 3 \cos(600t)$

频率在 400 到 600 之间, 不同频率放大不同; 相位与频率不成正比, 所以失真。

2)  $e(t) = 3 \cos(100t) \cos(300t)$

$$= \frac{3}{2} [\cos(200t) + \cos(400t)]$$

频率在 200 到 400 之间, 不同频率放大相同; 相位是过原点的一条直线, 所以不失真。

**例 4-2:** 高斯幅频特性是否物理可实现?

解: 根据 Paley-Wiener 准则: 物理可实现的必须满足

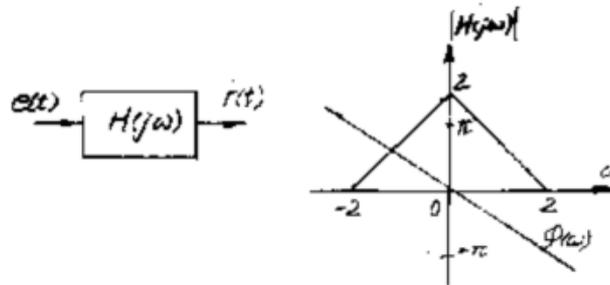
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|H(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$$

而高斯幅频特性

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|H(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln(e^{\omega^2})|}{1 + \omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{1 + \omega^2} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{\omega^2 + 1} \right) d\omega = \lim_{B \rightarrow \infty} \left( \omega - \operatorname{tg}^{-1} \omega \right) \Big|_{-B}^B \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} 2(B - \operatorname{tg}^{-1} B) = 2 \left( \lim_{B \rightarrow \infty} B - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

从上可以看出具有高斯幅频特性不满足 Paley-Wiener 准则，是发散的，所以物理不可实现。

**例 4-3:** 一线性系统频响曲线如下图所示，设激励信号为  $e(t) = 2 + 2 \cos t + 2 \cos 2t$ ，求零状态输出响应。



例 4-2 图

**解** (1) 求输入激励的频谱。

由周期信号的频谱密度函数可得

$$E(j\omega) = 4\pi\delta(\omega) + 2\pi[\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1)] + 2\pi[\delta(\omega+2) + \delta(\omega-2)]$$

(2) 求系统函数  $H(j\omega)$ 。

由给出的频响曲线可以写出

$$H(j\omega) = \begin{cases} |2-\omega|e^{-j\frac{\omega\pi}{2}} & |\omega| < 2 \\ 0 & |\omega| > 2 \end{cases}$$

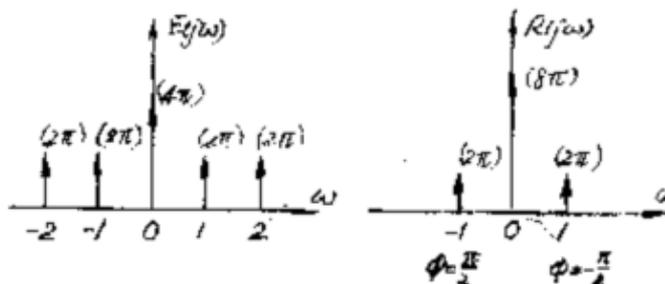
(3) 求响应的频谱。

$$\begin{aligned} R(j\omega) &= E(j\omega) \cdot H(j\omega) \\ &= 8\pi\delta(\omega) + 2\pi e^{j\frac{\pi}{2}}\delta(\omega+1) + 2\pi e^{-j\frac{\pi}{2}}\delta(\omega-1) \end{aligned}$$

(4) 由输出响应的频谱经傅里叶反变换求取时域响应。

$$\begin{aligned} r(t) &= F^{-1}\{R(j\omega)\} \\ &= 4 + e^{-j(t-\frac{\pi}{2})} + e^{j(t-\frac{\pi}{2})} \\ &= 4 + 2\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 4 + 2\sin t \end{aligned}$$

可见输入信号中的二次谐波被滤除，只留有直流与基波分量。输入输出频谱结构如下图所示。



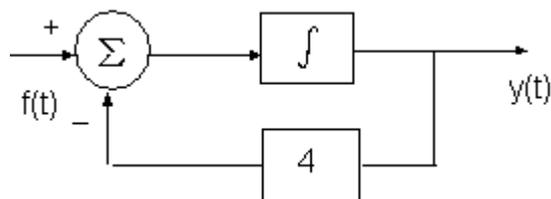
## 4.5 习题

1. 设某系统的频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 5}$$

试求当输入信号为  $x(t) = e^{-4t}u(t)$  时的零状态响应。

2. 系统如题 2 图所示, 求系统的频响  $H(j\omega)$ , 若  $f(t) = e^{-2t}u(t)$ , 求零状态响应  $y(t)$ 。

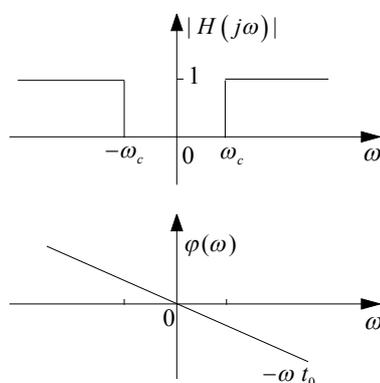


题2图

3. 一个LTI系统的冲激响应为  $h(t) = \frac{\sin 4\pi t}{\pi t}$ , 试求当输入  $f(t) = \cos 2\pi t + \sin 6\pi t$

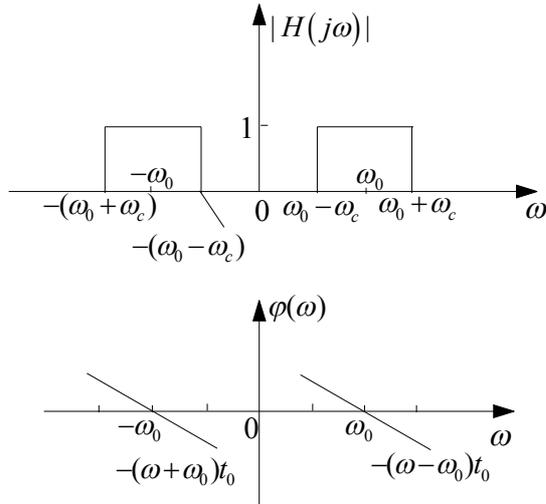
时系统的输出  $y(t)$ 。

4. 题4图是理想高通滤波器的幅频和相频特性, 求该滤波器的冲激响应。



题 4 图

5. 已知一带通滤波系统, 带通滤波器频响如题 5 图, 试求激励为  $f(t) = Sa(\omega_c t) \cos \omega_0 t$  时的输出信号  $f_1(t)$ , 并判断  $f(t)$  经传输后是否失真。



题 5 图

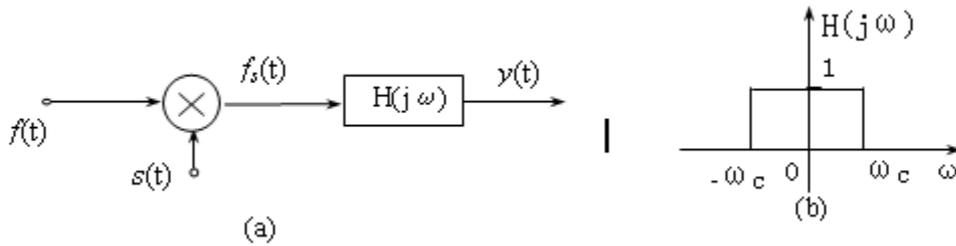
6. 某抑制载波调幅系统如题 6 图(a)所示, 已调信号为

$$f(t) = [3 + \cos 10t] \cdot 1000t, -\infty < t < \infty$$

$s(t) = \cos 1000t, -\infty < t < \infty$  低通滤波器的频响  $H(j\omega)$  如图(b), 试求

(1) 求截止频率  $20 \text{ rad/s} > \omega_c > 10 \text{ rad/s}$  时的输出信号  $y(t)$ , 并粗略画出  $f(t), s(t), f_s(t), y(t)$  各信号的频谱波形。

(2) 若截止频率  $\omega_c < 10 \text{ rad/s}$ , 则输出  $y(t)$  与(1)的有何不同?



题 6 图