5.8 S域分析、极点与零点

决定系统的时域响应
决定系统频率响应
决定系统稳定性

系统函数的定义

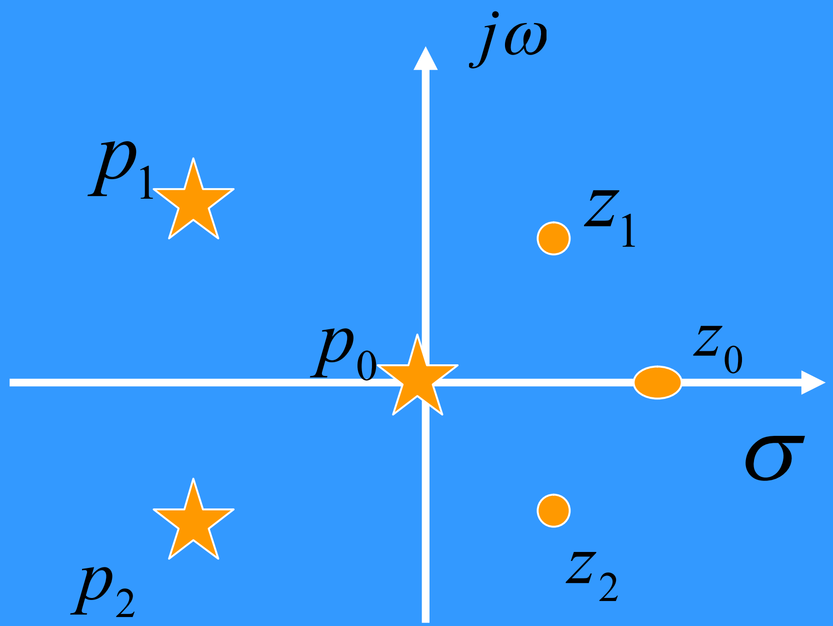
- 系统零状态下，响应的拉氏变换与激励拉氏变换之比叫作系统函数，记作**H(s)**.

$$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}$$

- 可以是电压传输比、电流传输比、转移阻抗、转移导纳、策动点阻抗或导纳

系统函数的极零点分布

$$H(s)=\frac{k\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$



§ 5.8.1 由系统函数的极零点分布决定时域特性

（1）时域特性——h(t)

$$H(s)=\frac{k\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

反变换

$$h(t)=L^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}k_i e^{p_i t}=\sum_{i=1}^{n}h_i(t)$$

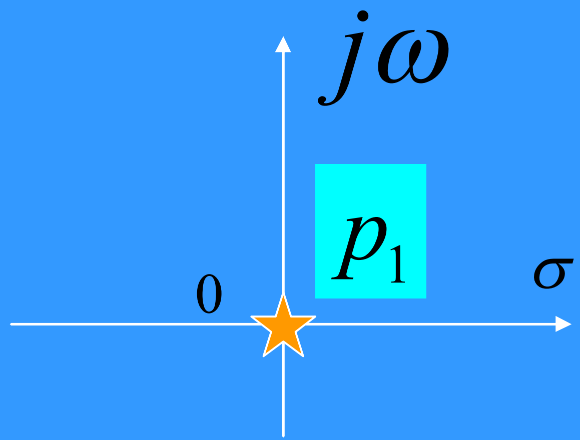
K_i与零点分布有关

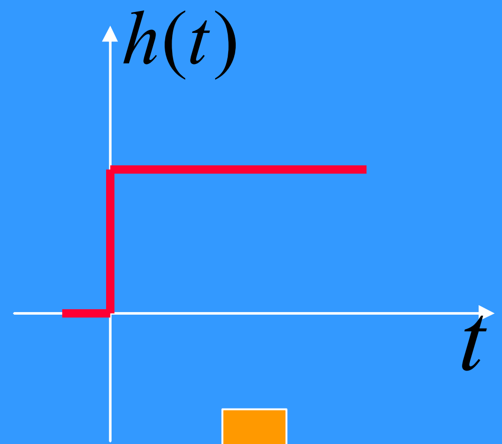
总特性

第 i个极点决定

(2) 极点分布的影响

(a)一阶极点在原点

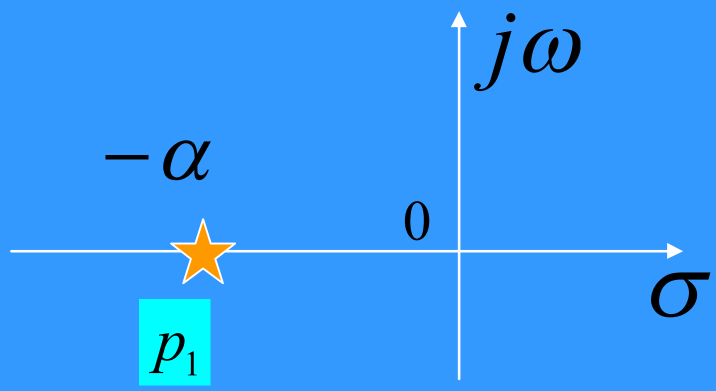


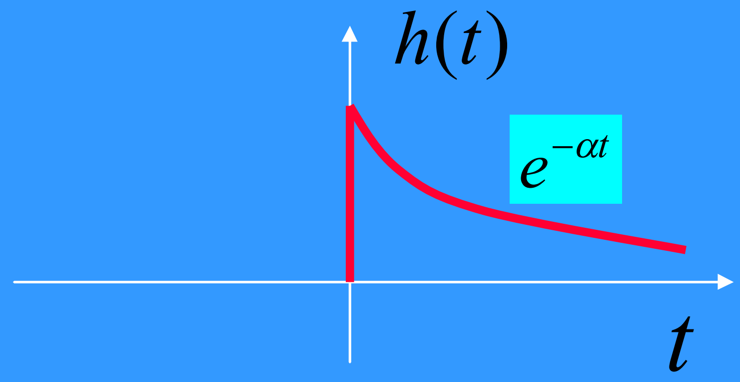


$$H(s)=\frac{1}{s}$$

$$h(t)=u(t)$$

（2） 几种典型的极点分布——(b)一阶极点在负实轴

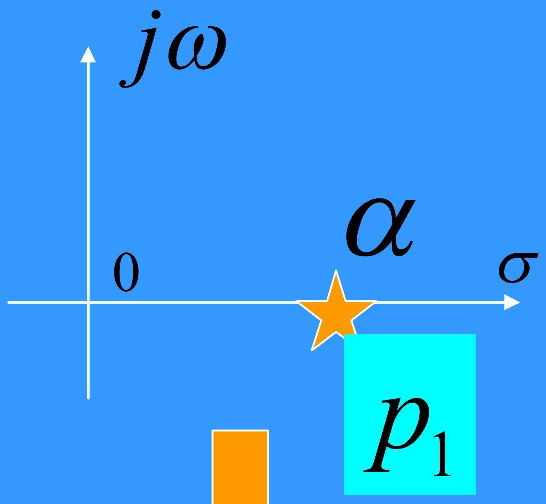


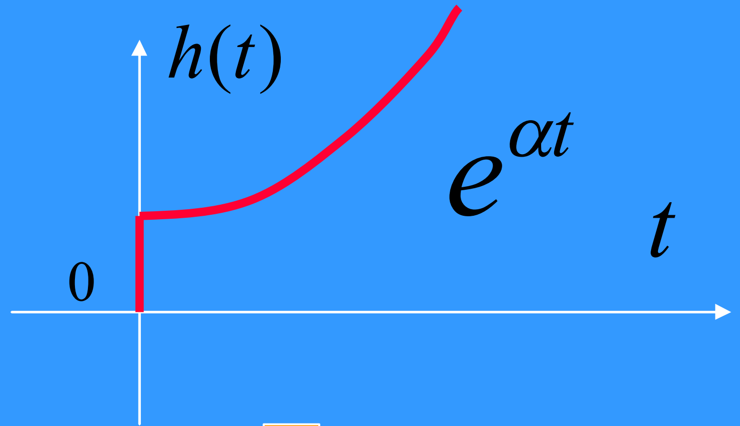


$$H(s) = \frac{1}{S+\alpha}$$

$$h(t) = e^{-\alpha t}$$

（2） 几种典型的极点分布——(c)一阶极点在正实轴

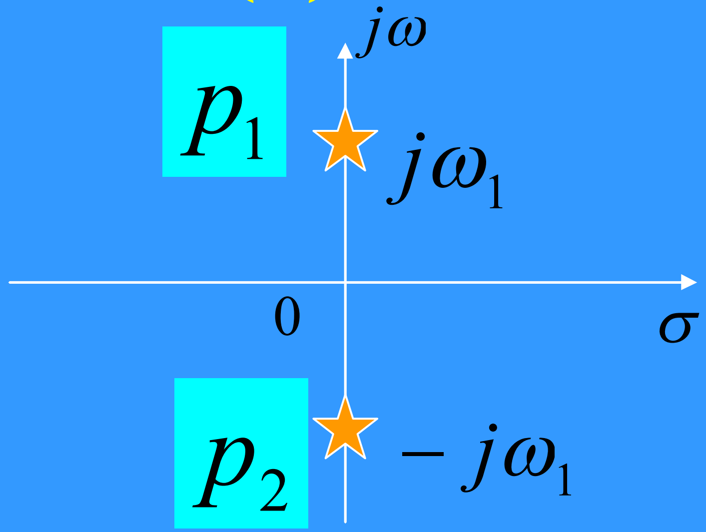


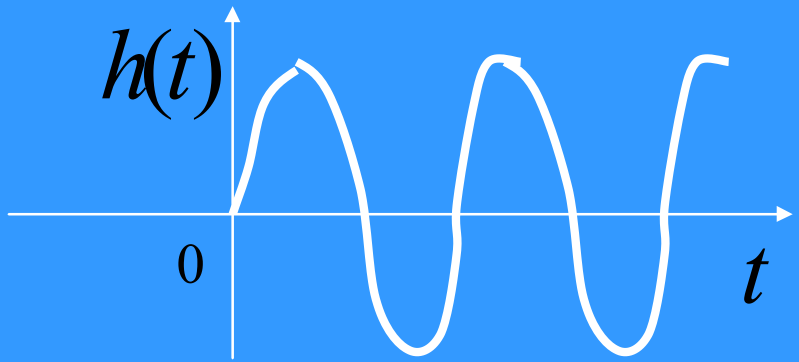


$$H(s) = \frac{1}{S-\alpha}$$

$$h(t) = e^{\alpha t}$$

（2） 几种典型的极点分布——(d)一阶共轭极点在虚轴上

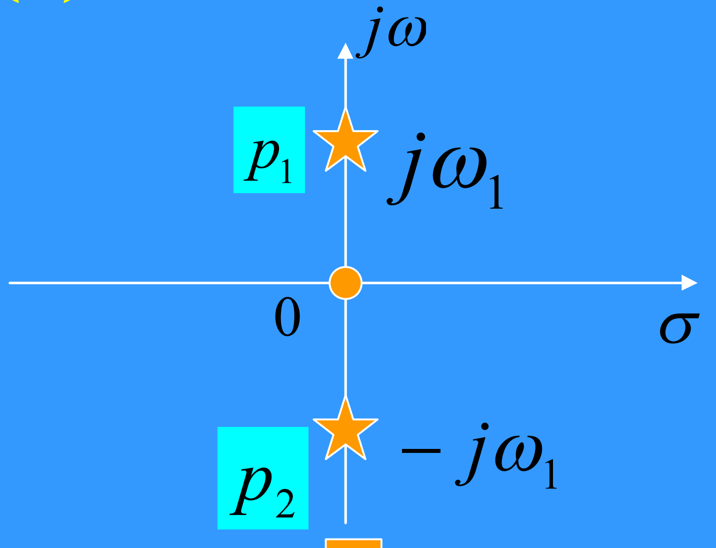


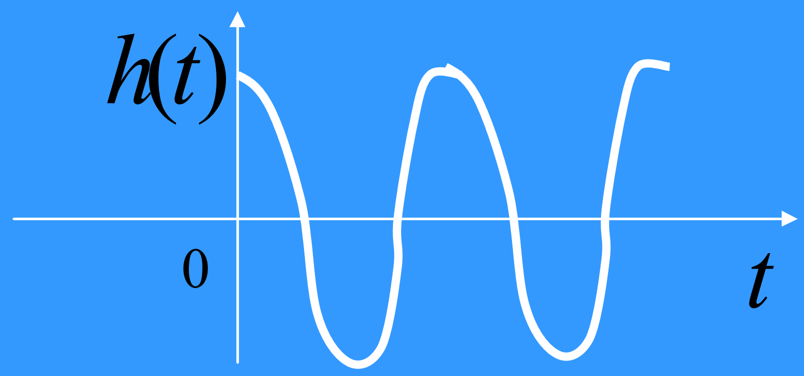


$$H(s)=\frac{\omega_1}{S^2+\omega_1^2}$$

$$h(t)=\sin\omega_1 t.u(t)$$

（2） 几种典型的极点分布——
(e)共轭极点在虚轴上，原点有一零点

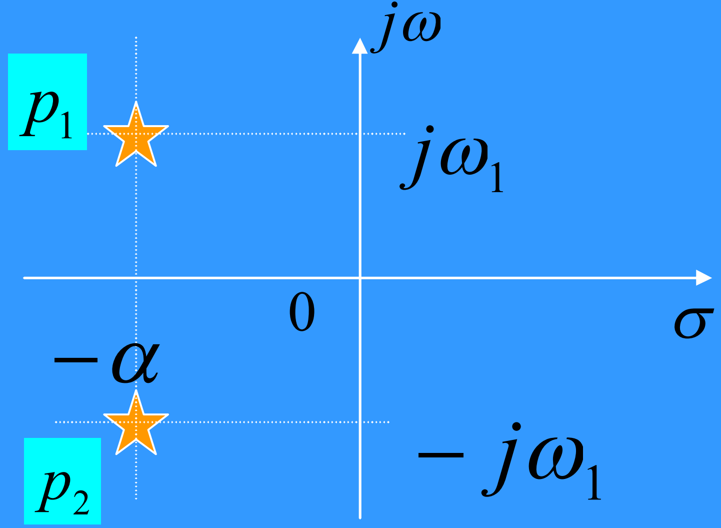


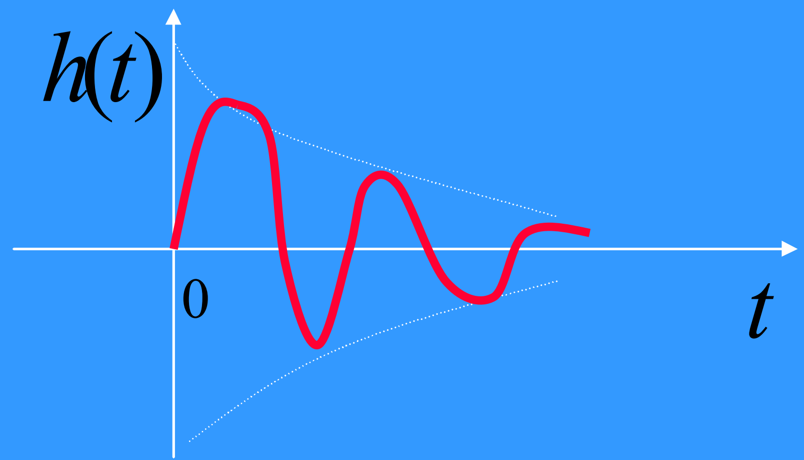


$$H(s)=\frac{S}{S^2+\omega_1^2}$$

$$h(t)=\cos\omega_1 t.u(t)$$

（2） 几种典型的极点分布——
(f)共轭极点在左半平面

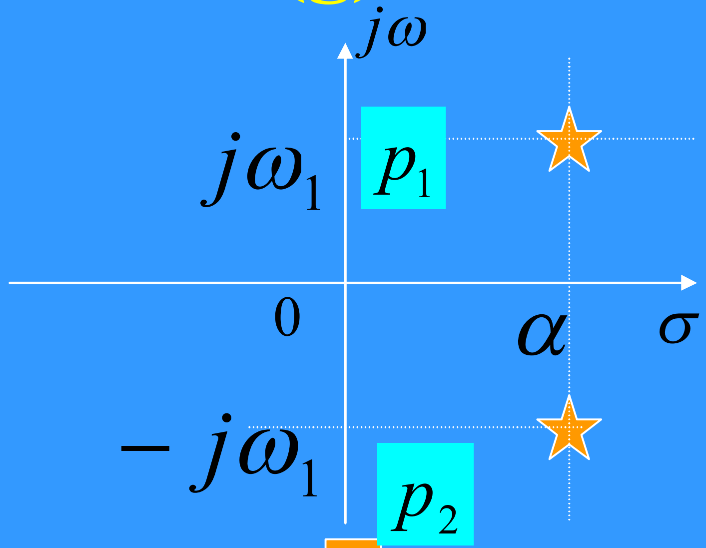


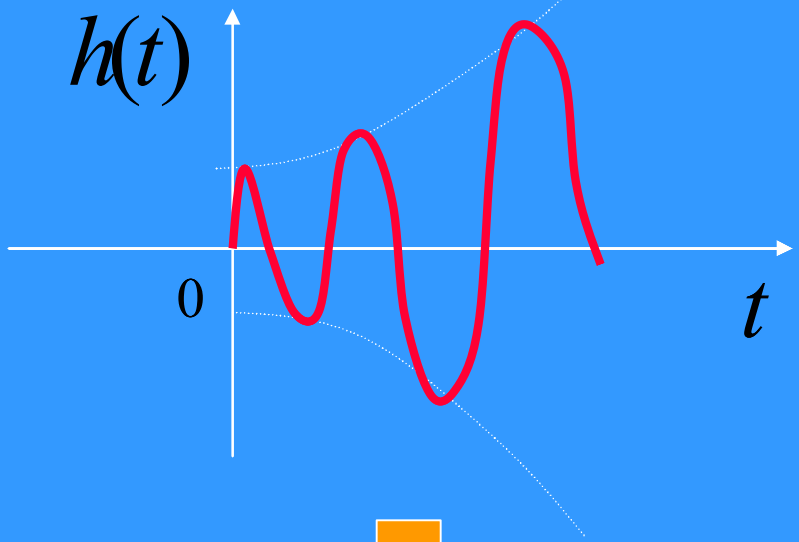


$$H(s)=\frac{\omega_1}{(S+\alpha)^2+\omega_1^2}$$

$$h(t)=e^{-\alpha t}\sin\omega_1 t.u(t)$$

（2） 几种典型的极点分布——(g)共轭极点在右半平面



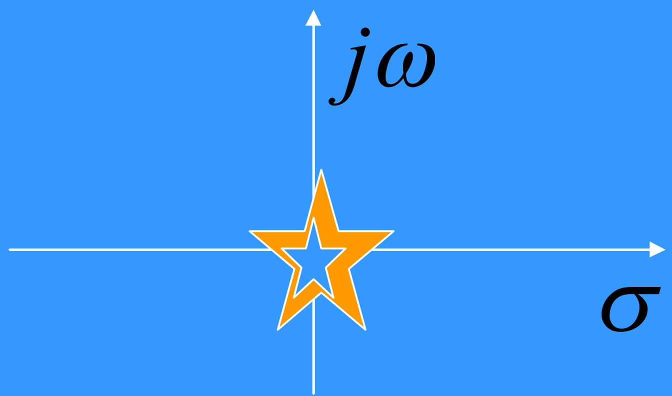


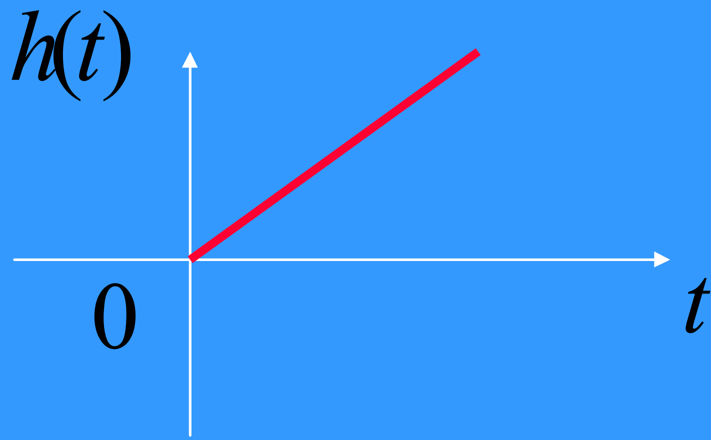
$$H(s)=\frac{\omega_1}{(S-\alpha)^2+\omega_1^2}$$

$$h(t)=e^{\alpha t}\sin\omega_1 t.u(t)$$

（3） 有二重极点分布——

(a)在原点有二重极点



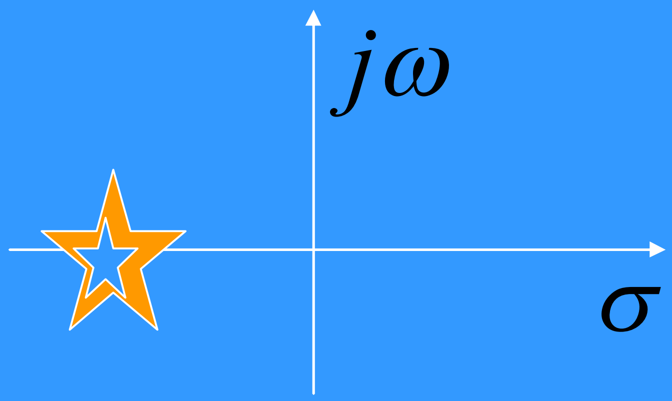


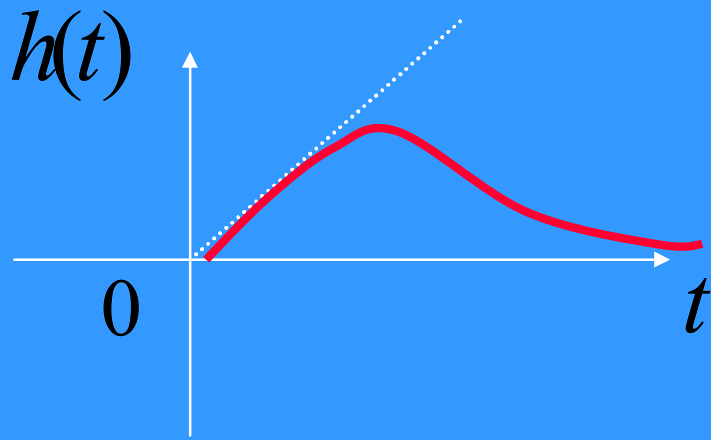
$$H(s)=\frac{1}{S^2}$$

$$h(t)=t$$

（3） 有二重极点分布——

(b)在负实轴上有二重极点



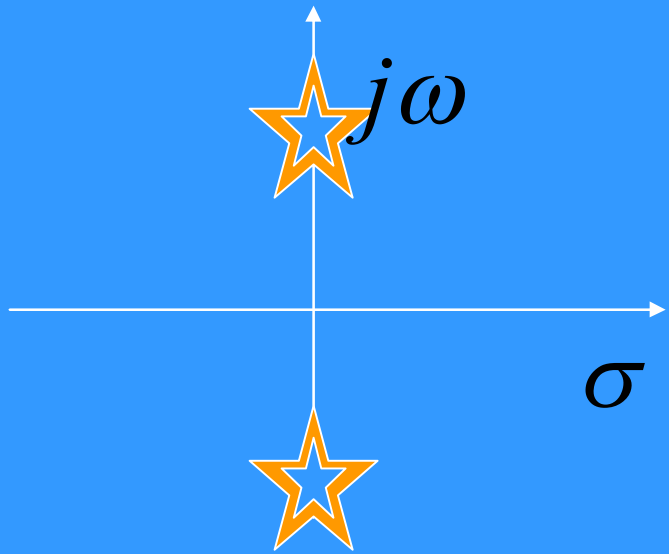


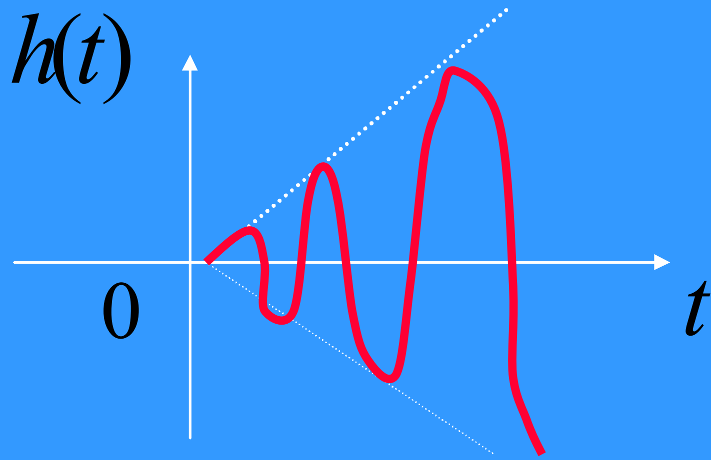
$$H(s)=\frac{1}{(S+\alpha)^2}$$

$$h(t)=te^{-\alpha t}$$

（3） 有二重极点分布——

(c)在虚轴上有二重极点

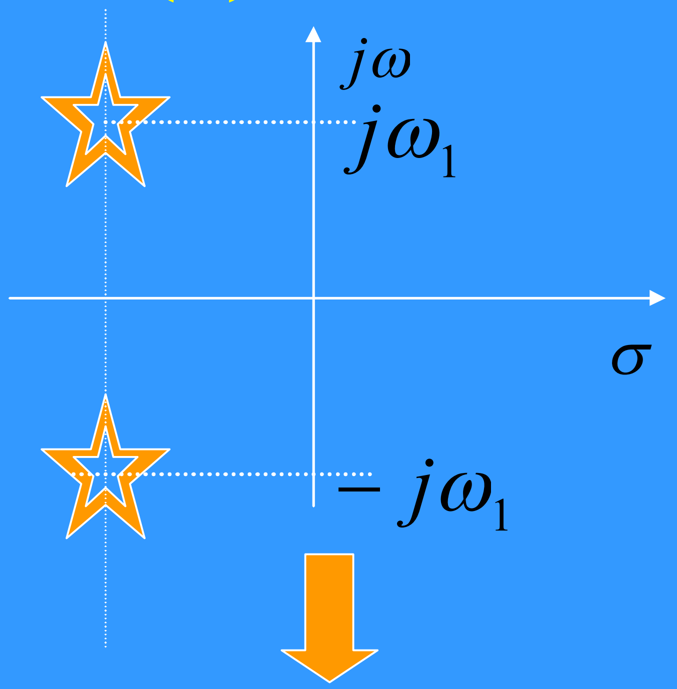


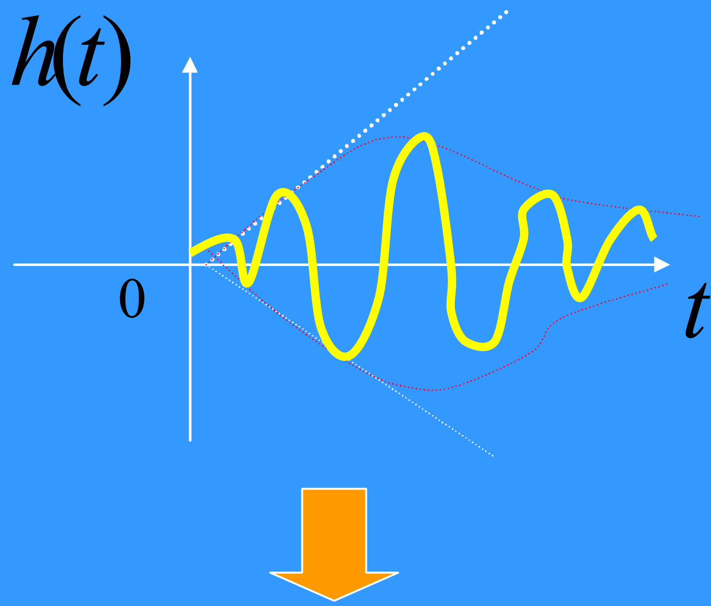


$$H(s)=\frac{2\omega S}{(S^2+\omega_1^2)^2}$$

$$h(t)=t\sin\omega_1 t$$

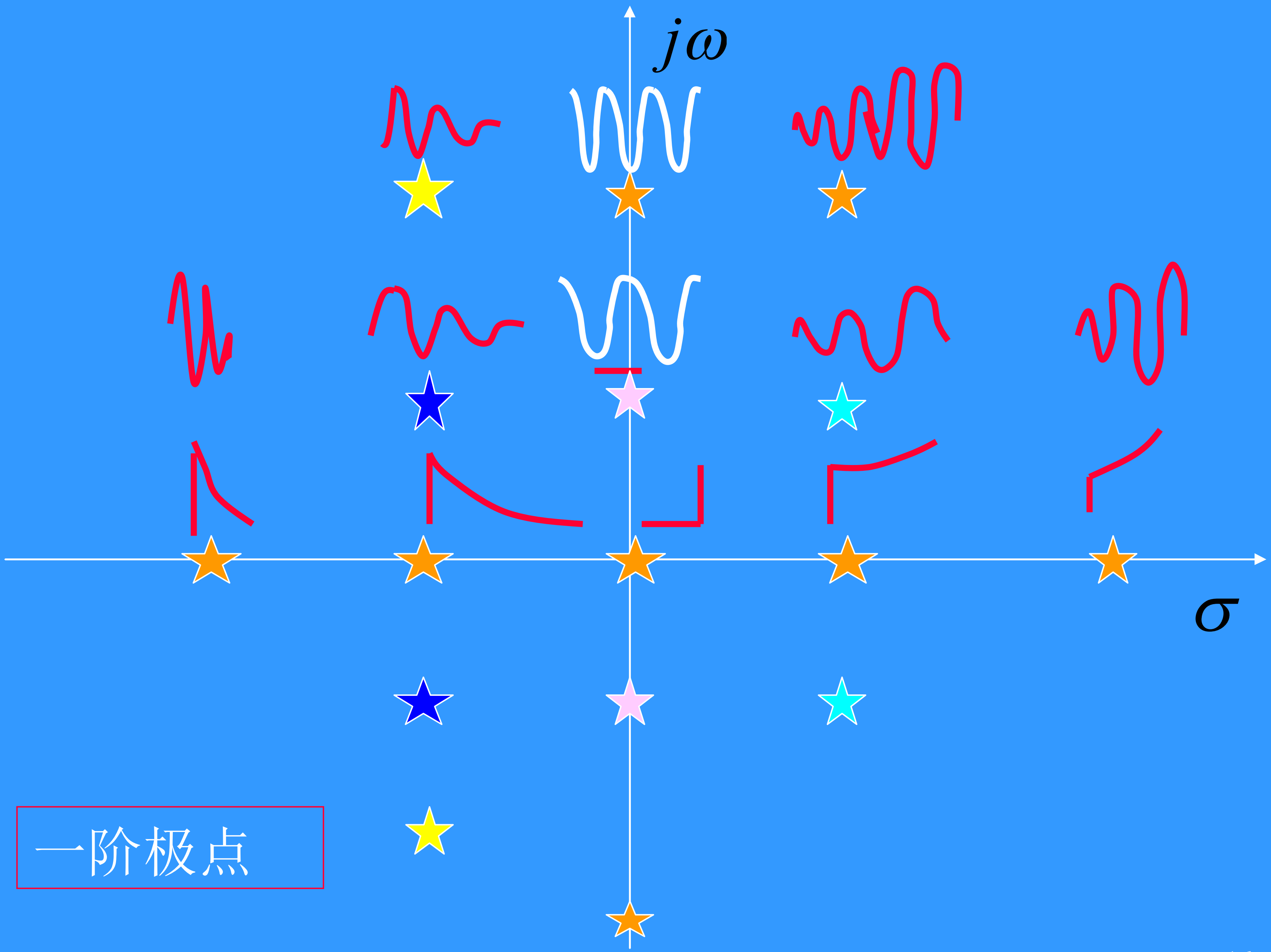
（3） 有二重极点分布——
(d)在左半平面有二重共轭极点



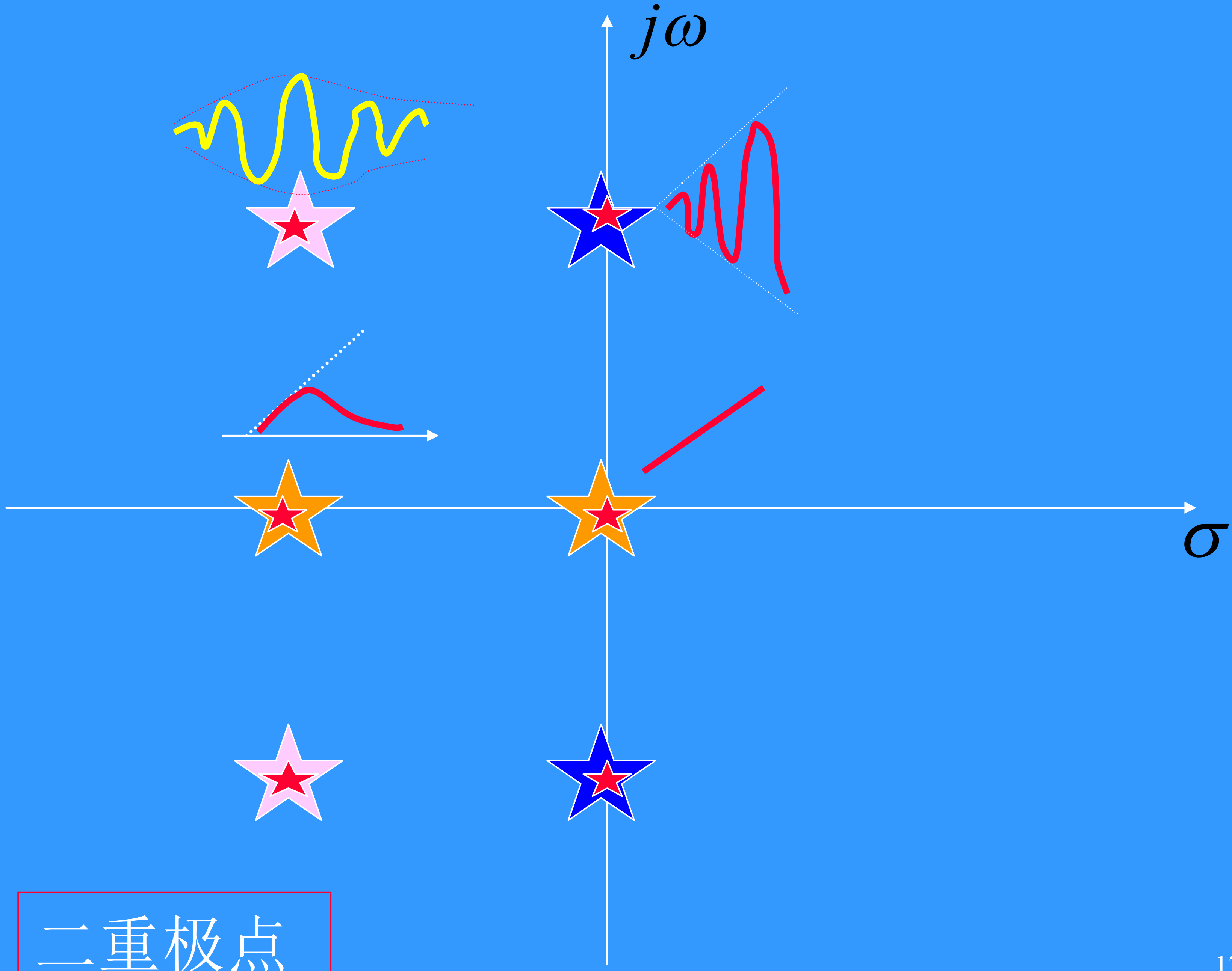


$$H(s) = \frac{2\omega(S+\alpha)}{[(S+\alpha)^2+\omega_1^2]^2}$$

$$h(t) = te^{-\alpha t}\sin\omega_1 t$$



一阶极点



二重极点

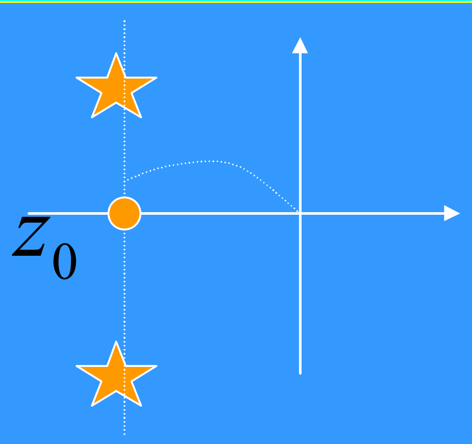
极点影响小结：

- 极点落在左半平面— h(t) 呈衰减趋势。稳定系统
- 极点落在右半平面— h(t)呈增长 趋势。不稳系统
- 极点落在虚轴上只有一阶极点— h(t) 等幅振荡，(两阶极点则增长) 临界稳定
- 极点落在原点— h(t)等于 u(t) 系统

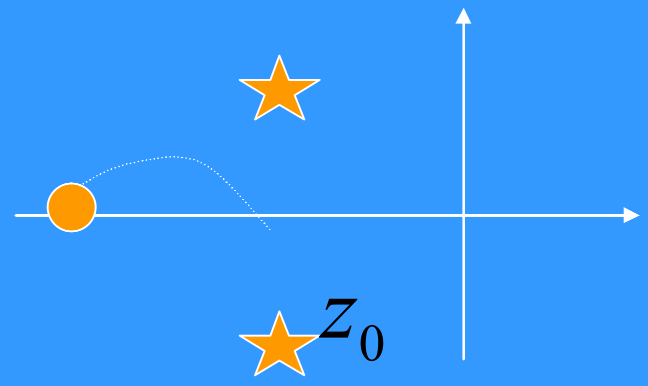
（4） 零点的影响

$$H_1(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

$$H_2(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2+1}$$



零点移动到原点



$$h(t) = e^{-t}\cos t \cdot u(t)$$

$$h(t) = e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t = \sqrt{2}e^{-t}\cos(t-45^o)u(t)$$

- 零点的分布只影响时域响应的幅度和相移，不影响振荡频率

§ 5.8.2 自由响应与强迫响应

$$R(s)=E(s).H(s)=\frac{\prod_{l=1}^{u}(s-z_l)}{\prod_{k=1}^{v}(s-p_k)}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

来自H(s)的极点

$$R(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}+\sum_{k=1}^{v}\frac{k_k}{s-p_k}$$

来自E(s)的极点

自由响应

$$r(t)=\sum_{i=1}^{n}k_i e^{p_i t}+\sum_{k=1}^{v}k_k e^{p_k t}$$

强迫响应

$$r(t)=\sum_{i=1}^{n} k_i e^{p_i t}+\sum_{k=1}^{v} k_k e^{p_k t}$$

结论

- H(s)的极点决定了自由响应的振荡频率，与激励无关
- 自由响应的幅度和相位与H(s)和E(s)的零点有关，即零点影响 K_i , K_k 系数
- E(s)的极点决定了强迫响应的振荡频率，与H(s) 无关
- 用H(s)只能研究零状态响应．H(s)中零极点相消将使某固有频率丢失, 而零输入响应要求表现全部固有频率的作用。

§ 5.8.3 暂态响应与稳态响应

•暂态响应:激励接入后，全响应中暂时出现的成分，随着t得增大，它将消失。

稳态响应：全响应－暂态响应分量

- 系统H(s)的极点一般是复数，讨论它们实部和虚部对研究系统的稳定性很重要
- 不稳定系统 $\mathrm{Re}\left[p_i\right] > 0$ 自由响应增幅震荡
- 临界稳定系统 $\mathrm{Re}\left[p_i\right] = 0$ 自由响应等幅震荡

  稳态分量
- 稳定系统 $\mathrm{Re}\left[p_i\right] < 0$ 自由响应衰减

  暂态分量

§5.8.4 由系统函数决定系统频率特性

- 什么是系统频率响应？

  不同频率的正弦激励下系统的稳态响应.

一般为复数，可表示为下列两种形式：

$$H(j\omega) = R(j\omega) + jI(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \left|H(j\omega)\right| e^{j\varphi(j\omega)}$$

$$e(t)=E_m\sin\omega_0 t \Rightarrow E(s)=\frac{E_m\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$R(s)=E(s)H(s)$$

$$=\frac{k_{11}}{s+j\omega_0}+\frac{k_{12}}{s-j\omega_0}+\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}$$

由正弦激励的极点决定的稳态响应

如系统是稳定的，该项最后衰减为零

$$e(t)=E_m\sin\omega_0 t \qquad r(t)=E_m|H(j\omega_0)|\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$$

幅度改变

相位偏移

$$H(j\omega_0)=H_0e^{j\varphi_0}$$

若 ω_0 换成变量 ω

$$H(j\omega)=H(S)\big|_{s=j\omega}=\left|H(j\omega)\right|e^{j\varphi(j\omega)}$$

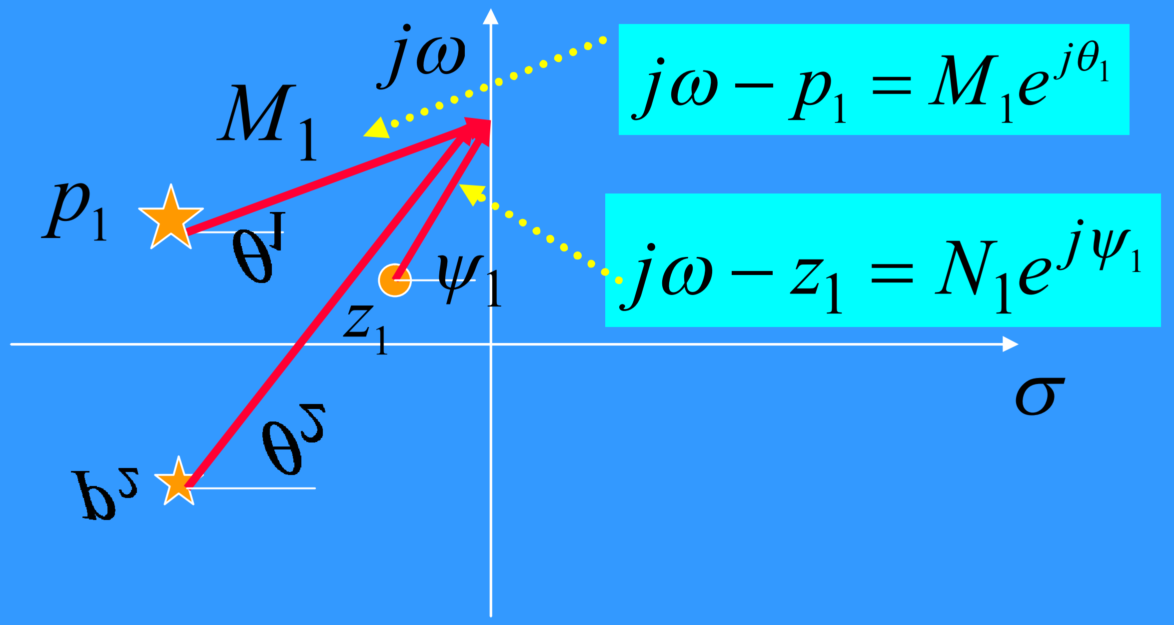
系统频率特性

幅频特性

相位特性

用几何法求系统频率特性

$$H(j\omega)=\frac{k\prod_{j=1}^{m}(j\omega-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(j\omega-p_i)}=k\frac{N_1N_2\cdots N_m}{M_1M_2\cdots M_n}e^{j\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i-\sum_{l=1}^{n}\theta_l\right)}$$



- 根据系统H(s)的极零点在S平面的分布，确定该系统的幅频特性和相频特性

（1）一阶系统频率响应

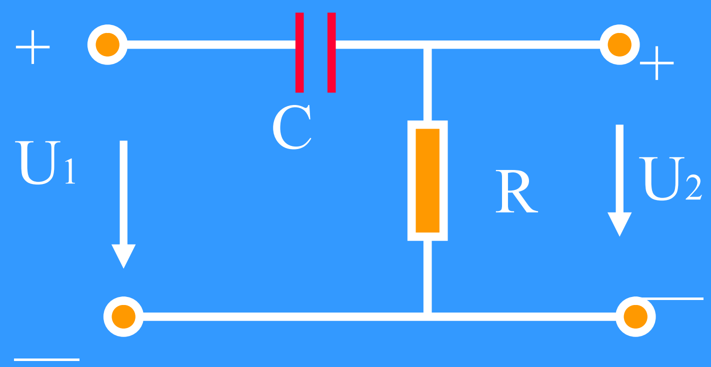
$$H(s) = K\frac{s}{s-p_1}$$

- 一在原点的零点，一在实轴的极点

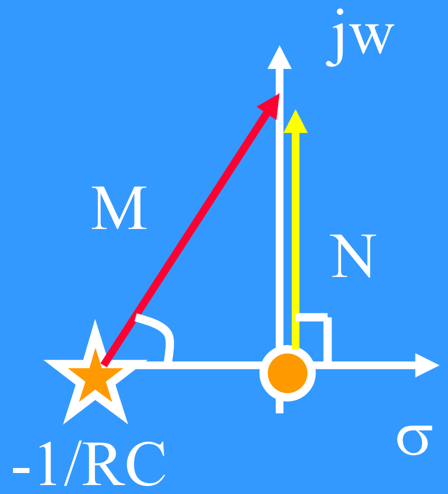
$$H(s) = \frac{k}{s-p_1}$$

- 只有无穷远处的零点一在实轴的极点

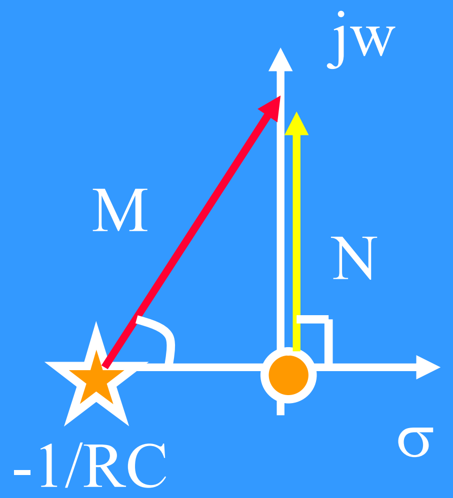
例：求一阶高通系统的频率特性



$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{R}{R+\frac{1}{sc}}=\frac{s}{s+\frac{1}{RC}}$$



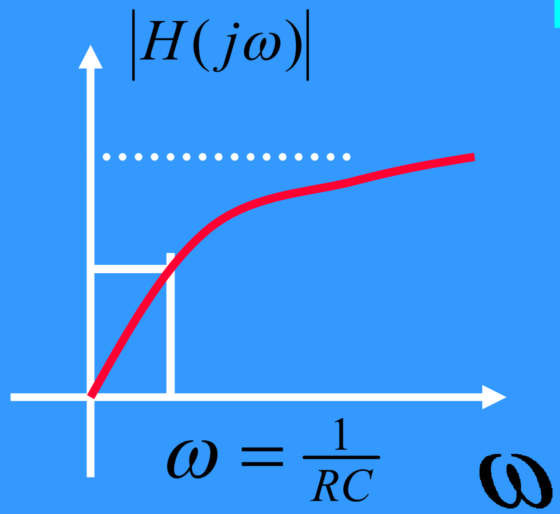
$$H(j\omega)=\frac{N}{M}e^{j(\psi-\theta)}$$



$$H(j\omega)=\frac{N}{M}e^{j(\psi-\theta)}$$

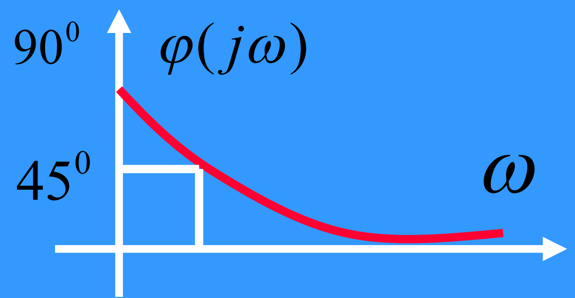
$$(1)\omega=0,\quad N=0,\quad M={}^{1}\!/_{RC}\qquad {}^{N}\!/_{M}=0$$

$$\psi=90^{0},\theta=0^{0}$$



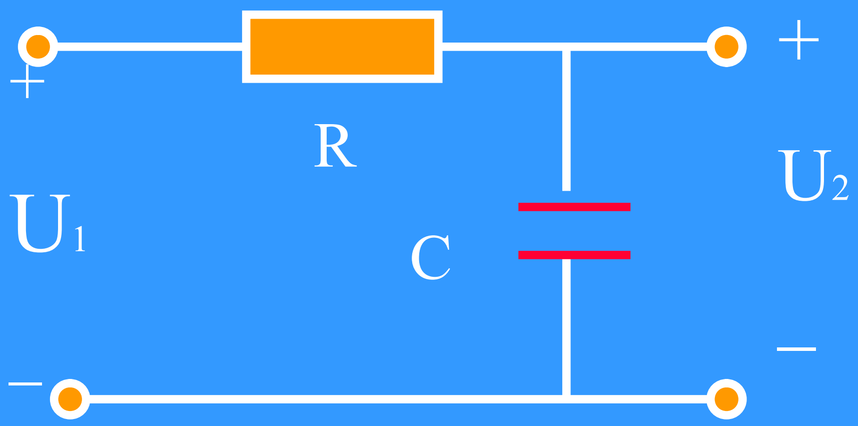
$$(2)\omega={}^{1}\!/_{RC},\quad N={}^{1}\!/_{RC}\quad ,\theta=45^{0},$$

$$M={}^{\sqrt{2}}\!/_{RC},\quad {}^{N}\!/_{M}={}^{1}\!/_{\sqrt{2}}$$



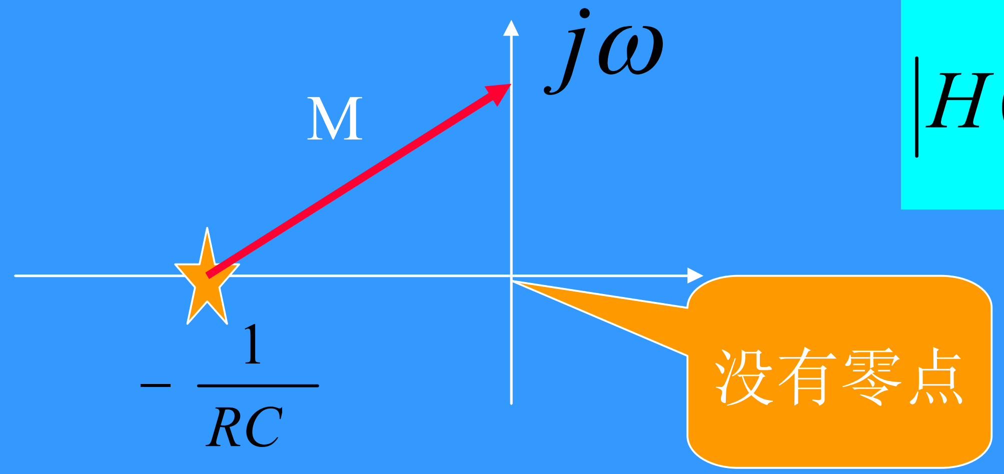
$$\omega=\infty,\quad \frac{N}{M}\approx 1,\quad \varphi-\theta=0$$

例： 求一阶低通滤波器的频率特性

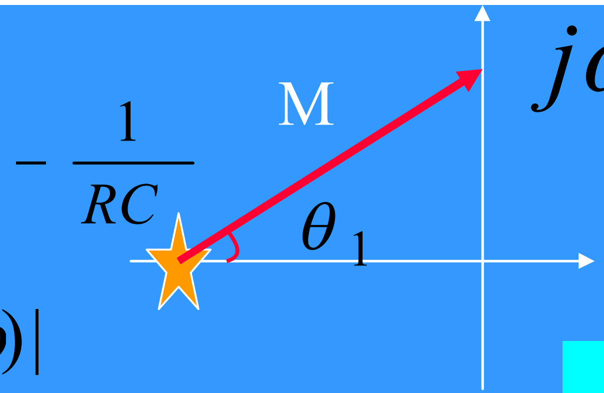


$$H(s)=\frac{U_2}{U_1}=\frac{\frac{1}{Cs}}{R+\frac{1}{Cs}}$$

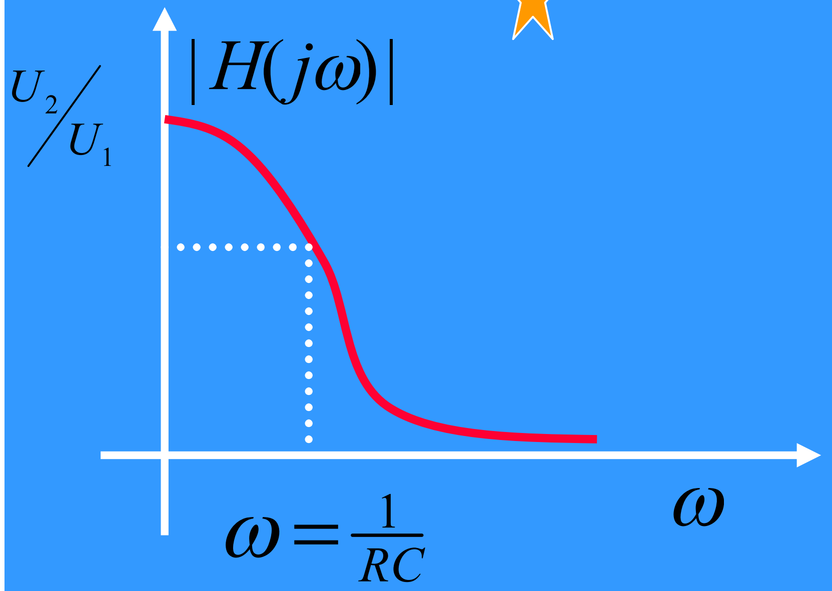
$$=\frac{1}{RC}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}$$



$$\left|H(j\omega)\right|=k\frac{1}{M}e^{j(\psi-\theta_1)}$$



$$|H(j\omega)| = k\frac{1}{M}e^{j(\psi-\theta_1)}$$

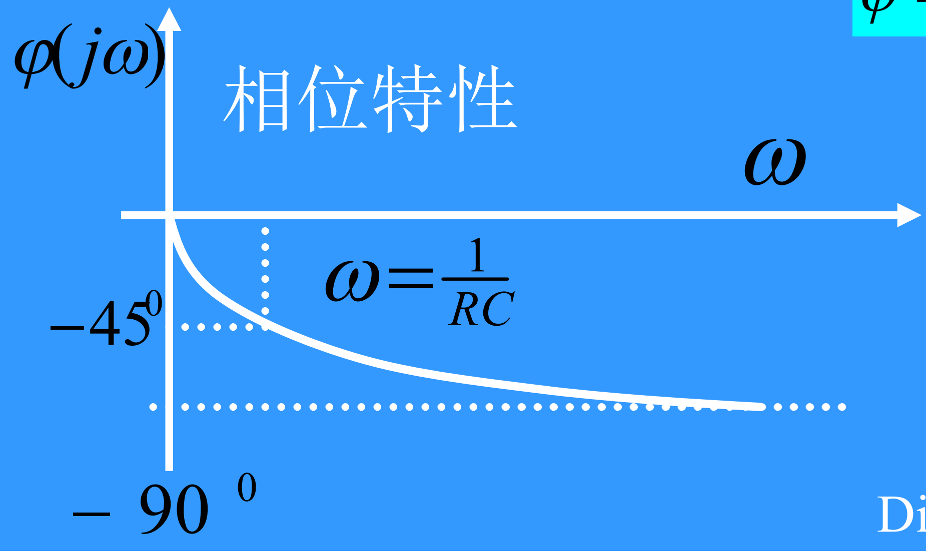


$$(1)\omega=0,\quad M=1/RC\quad U_2/U_1=1$$

$$\psi=0,\theta=0$$

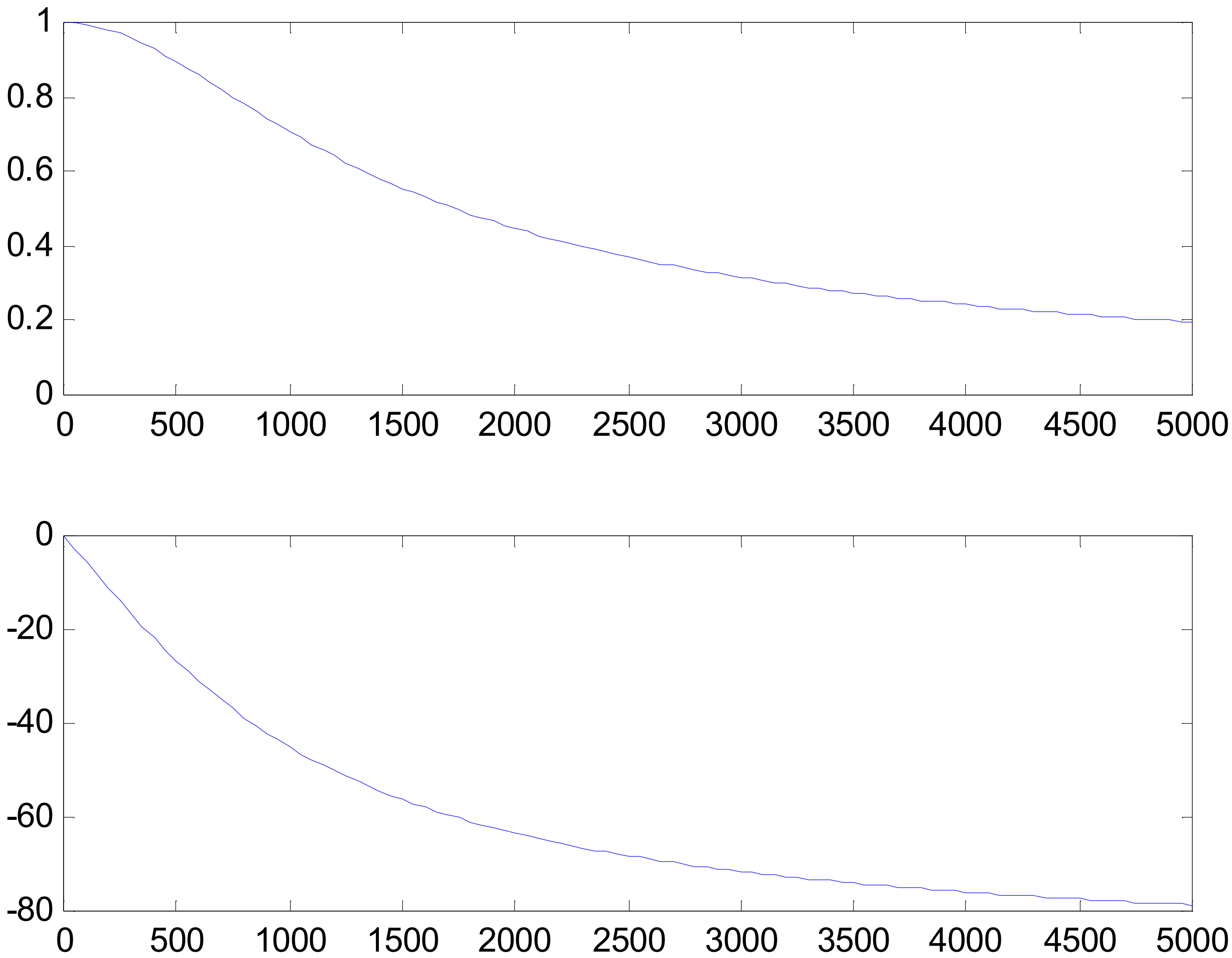
$$(2)\omega=\frac{1}{RC},\quad M=\frac{\sqrt{2}}{RC},\quad U_2/U_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi=0-\theta_1=-45^0$$



$$(3)\omega=\infty,\quad M=\infty,\quad U_2/U_1=0$$

$$\varphi=0-90^0=-90^0$$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
4500
5000
0
-20
-40
-60
-80
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
4500
5000

§5.8.5 系统的稳定性

稳定系统的定义：有界输入产生有界输出。

稳定系统的判据有三：

1.时域上：系统稳定的充要条件：冲激响应绝对可积：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

即：h(t)是衰减的。

2. S域判据： H(s)的极点在S左半平面 $\mathrm{Re}[p_i] < 0$

3. 罗斯判据，对高阶系统。（自学）

例：如图反馈系统，问：k满足什么条件时系统稳定？已知图中子系统的转移函数G(S)为：

$$G(S)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

解： $U_2(S)=\left[U_1(S)+kU_2(S)\right]G(S)$

$$\therefore\ H(S)=\frac{U_2(S)}{U_1(S)}=\frac{G(S)}{1-kG(S)}$$

$$=\frac{1/(s+1)(s+2)}{1-k/(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s^2+3s+2-k}$$

$$\therefore\ p_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{3}{2}\right)^2-2+k}$$

为使极点在左半平面，应有：

$$\therefore\ \left(\tfrac{3}{2}\right)^2-2+k<\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$\therefore\ k<2$时系统稳定。

HW

- 5-15
- 5-16
- 5-22
- 5-24