

Ch5 拉普拉斯变换和连续时间系统的

Laplace Transform 复频域分析

本章要点

- 拉氏变换的定义——从傅立叶变换到拉氏变换
- 拉氏变换的收敛域，性质
- 系统函数和单位冲激响应
- S域分析、极点与零点
- 频率响应，稳定性分析
- 信号流图与系统模拟
- 拉氏变换与傅氏变换的关系

Recall: 上一章讲述了 F -变换: $\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$

F -变换是将信号表示成复指数 e^{-st} 线性组合, $s = j\omega$

F -变换在信号分析 (频谱) 及LTI系统分析 (频响特性)

具有非常重要的作用, 而信号与系统之相互作用可由卷积定理方便表述。

同时注意到 F -变换侧重于信号分析

\mathcal{L} -变换:

作为 \mathcal{F} -变换的推广，也是将信号表示成复指数 e^{-st} 线性组合，其中 s 为任意复数 $s = \sigma + j\omega$ 。 \mathcal{L} -变换除了和 \mathcal{F} -变换一样分析信号与LTI系统，同时提供了研究信号与系统的另一种工具，更重要的是 \mathcal{L} -变换还可以用来分析 \mathcal{F} -变换所不能分析的系统，如不稳定系统。

因此要注意 **\mathcal{L} 变换侧重于系统分析**

本章重点：

\mathcal{L} -变换在系统分析中应用，如系统函数的概念、系统时域特性、系统频域特性、系统稳定性分析等。

本章思路：

\mathcal{L} -变换定义、性质→结合系统分析介绍 \mathcal{L} 变换的应用

5.1.1 Definition——from FT to LT

有几种情况不满足狄里赫利条件:

- $u(t)$
- 增长信号 e^{at} ($a > 0$)
- 周期信号 $\cos \omega_1 t$

- 若乘一衰减因子 $e^{-\sigma t}$, σ 为任意实数, 则 $f(t) \cdot e^{-\sigma t}$ 收敛, 于是满足狄里赫利条件

$$u(t)e^{-\sigma t}$$

$$e^{at} \cdot e^{-\sigma t} \quad (\sigma > a)$$

$$e^{-\sigma t} \cos \omega_1 t$$

因果

$$f_1(t) = f(t)e^{-\sigma t}$$

$$s = \sigma + j\omega$$

象函数
正LT

$$F_1(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

反变换

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) e^{\sigma t} e^{j\omega t} d\omega \quad s = \sigma + j\omega$$

原函数
逆LT

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s) e^{st} ds \quad ds = j d\omega$$

FT: 实频率 ω 是振荡频率

LT: 复频率S ω 是振荡频率, σ 控制衰减速度

单边拉式正变换:

Unilateral LT

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = LT[f(t)]$$

单边拉式反变换:

$$f(t) = \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s)e^{st} ds \right] \cdot u(t) = LT^{-1}[F(S)]$$

双边拉式正变换:

$$F_b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Bilateral LT

双边拉式反变换:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F_b(s)e^{st} ds$$

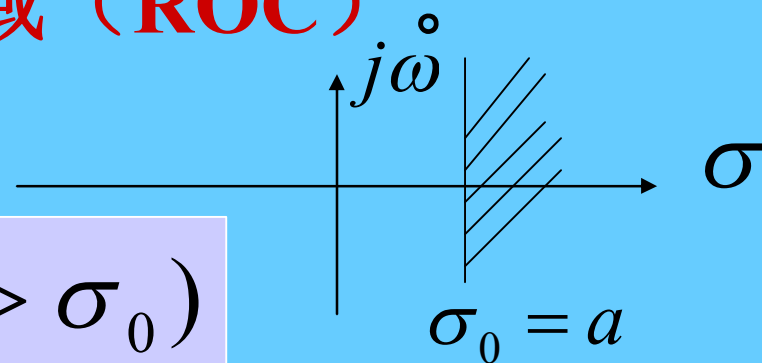
Region of Convergence

5.1.2 收敛条件

在S复平面中，凡能使F(S)存在的S值的范围称为拉式变换的**收敛域 (ROC)**。

1. 单边拉式变换的收敛域

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > \sigma_0)$$



若上式在 $\sigma > \sigma_0$ 时成立，则函数 $f(t)$ 的拉式变换在 $\text{Re}[S] > \sigma_0$ 的范围内是收敛域的。

收敛域： σ_0 时右侧的阴影部分 $\text{Re}[S] > \sigma_0$ 的范围。

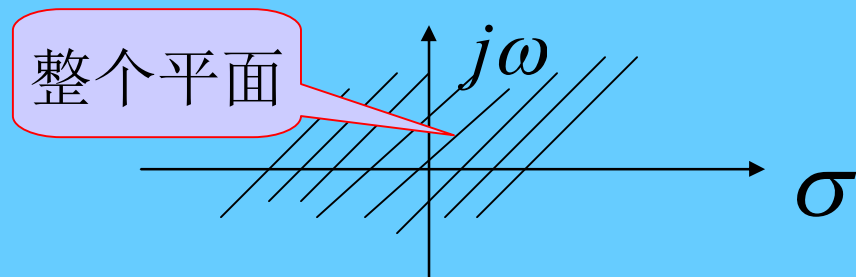
收敛轴： $\sigma = \sigma_0$ 时的直线， **收敛边界**

收敛坐标： σ_0

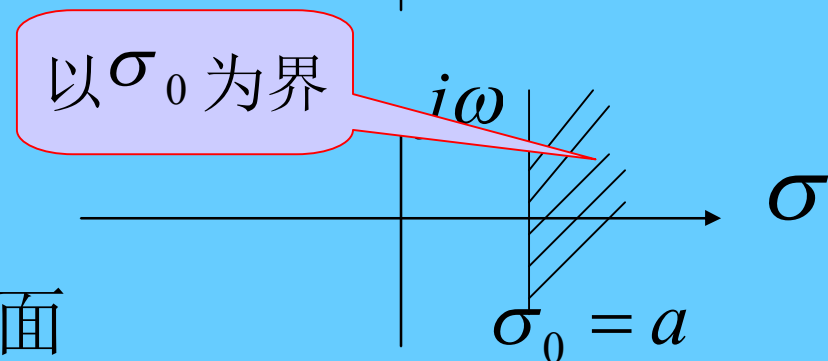
收敛域

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > \sigma_0)$$

- 有始有终信号和能量有限信号**时限信号**
(如单个矩形脉冲)



- 等幅振荡信号和增长信号
 $\sigma_0 > 0$ 或 $\sigma_0 > a$



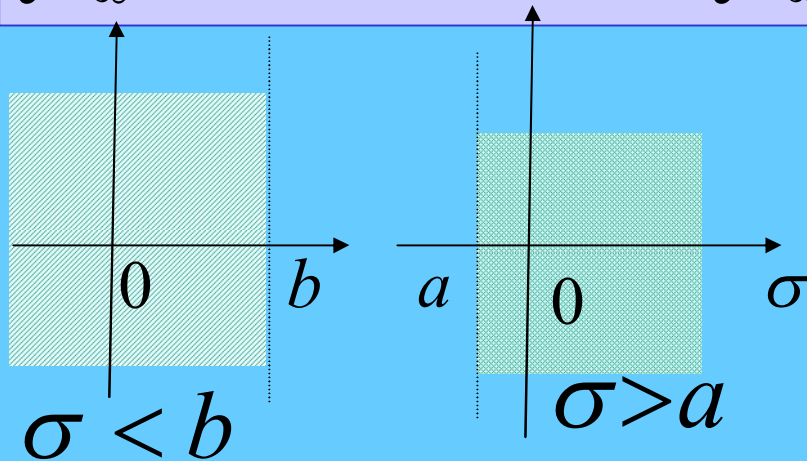
$u(t)$, t^n 的收敛域: S右半平面

- 不收敛信号 e^{t^2} , te^{t^2} ($0 \leq t \leq \infty$)
除非 ($0 \leq t \leq T$)

2 双边拉氏变换的收敛域 (ROC) **bilateral LT**

$$f(t) = e^{at} u(t) + e^{bt} u(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(b-\sigma)t} dt + \int_0^{\infty} e^{(a-\sigma)t} dt$$

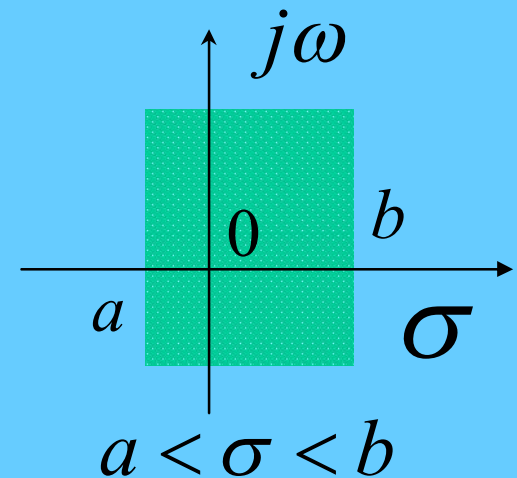


$$\sigma < b$$

$$a < \sigma$$

$$b > a, a < \sigma < b$$

收敛，存在双边拉氏变换



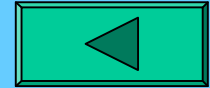
$$b < a$$

没有收敛域。不存在双边拉氏变换

5.2 常用信号的拉氏变换

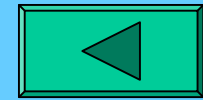
| | |
|-----------------------|----------------------|
| $x(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| $e^{-a \cdot t} u(t)$ | $\frac{1}{s + a}$ |
| $t^n u(t)$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $t u(t)$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $\delta(t)$ | 1 |
| $\delta(t - t_0)$ | e^{-st_0} |

5.3 拉氏变换的基本性质 (1)



| | | |
|------|----------------------------------|--|
| 线性 | $\sum_{i=1}^n k_i \cdot f_i(t)$ | $\sum_{i=1}^n k_i \cdot LT[f(t)]$ |
| 时移 | $f(t-t_0)u(t-t_0)$ | $e^{-st_0} F(s)$ |
| 尺度变换 | $f(at)$ | $\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ |
| 频移 | $f(t)e^{-at}$ | $F(s+a)$ |
| 微分 | $\frac{df(t)}{dt}$ | $sF(s) - f(0^-)$ |
| 积分 | $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ | $\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0^-)}{s}$ |

拉氏变换的基本性质 (2)



| | | |
|------|---|---|
| 尺度变换 | $f(at)$ | $\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ |
| 初值定理 | $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ | |
| 终值定理 | $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ | |
| 卷积定理 | $f_1(t) * f_2(t)$ | $F_1(s) \cdot F_2(s)$ |
| | $f_1(t) \cdot f_2(t)$ | $\frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$ |

例： 单边正弦余弦信号的拉氏变换

$$\cos \omega t \cdot u(t)$$



$$f(t) = u(t) \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$



$$F(S) = \left(\frac{1}{S + j\omega} + \frac{1}{S - j\omega} \right) \frac{1}{2}$$
$$= \frac{S}{S^2 + \omega^2}$$

$$\sin \omega t \cdot u(t)$$



$$f(t) = u(t) \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$



$$F(S) = \left(\frac{-1}{S + j\omega} + \frac{1}{S - j\omega} \right) \frac{1}{2j}$$
$$= \frac{\omega}{S^2 + \omega^2}$$

例：衰减余弦的拉氏变换

$$F_0(S) = LT[\cos \omega t] = \frac{S}{S^2 + \omega^2}$$

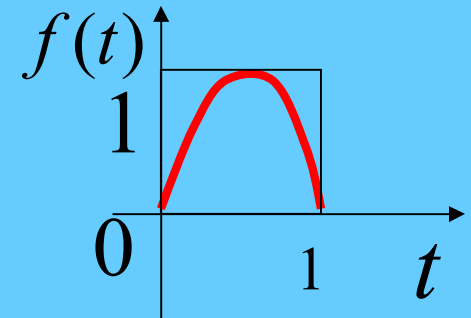
$$f(t) = e^{-\beta t} \cos \omega t$$

$$F(S) = \frac{S + \beta}{(S + \beta)^2 + \omega^2}$$

频移特性

例：求下式的拉氏变换

$$f(t) = \sin \pi t [u(t) - u(t-1)]$$



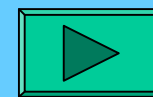
解： $f(t) = \sin \pi t \cdot u(t) - \sin \pi t \cdot u(t-1)$

$$f(t) = \sin \pi t \cdot u(t) - \sin[\pi(t-1) + \pi] \cdot u(t-1)$$

$$f(t) = \sin \pi t \cdot u(t) + \sin[\pi(t-1)] \cdot u(t-1)$$

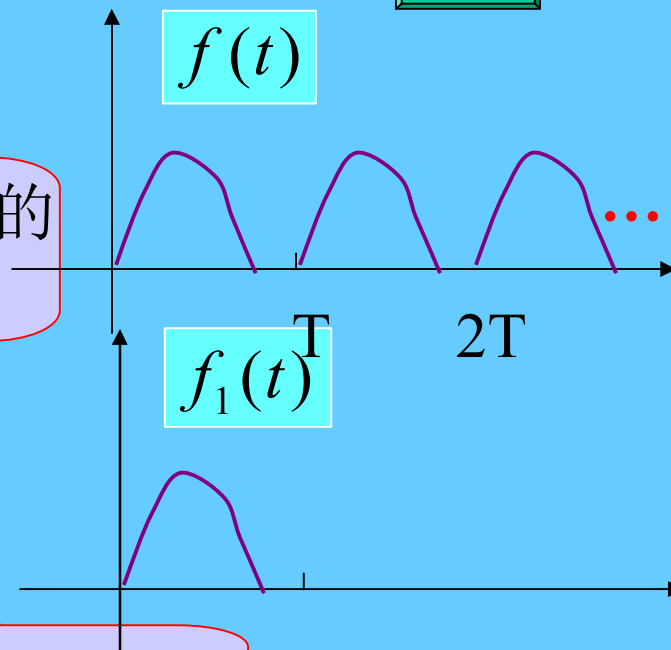
$$F(S) = \frac{\pi}{S^2 + \pi^2} + \frac{\pi e^{-S}}{S^2 + \pi^2} = \frac{\pi(1 + e^{-S})}{S^2 + \pi^2}$$

例：周期信号的拉氏变换



$$\overset{LT}{f_1(t) \Leftrightarrow F_1(s)}$$

$f_1(t)$ 第一周期的拉氏变换



$$\overset{LT}{f_1(t-nT) \Leftrightarrow e^{-snT} F_1(s)}$$

利用时移特性

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(t-nT) \overset{LT}{\Leftrightarrow} F_1(s) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-SnT}$$
$$= \frac{F_1(s)}{1 - e^{-ST}}$$

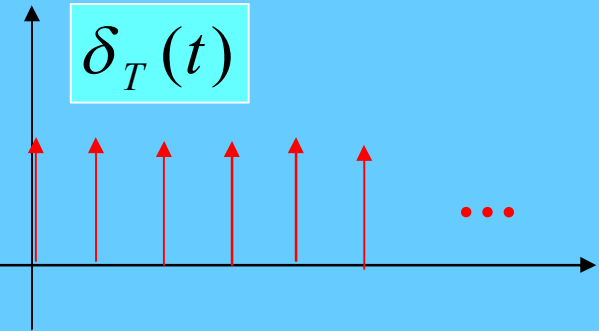
利用无穷级数求和

例：周期单位冲激序列的拉氏变换

单位冲激
序列

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$\delta_T(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-SnT} = \frac{1}{1 - e^{-ST}}$$



拉式变换

或利用

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_1(t - nT) \stackrel{LT}{\Leftrightarrow} \frac{F_1(s)}{1 - e^{-ST}}$$

$$F_1(s) = LT[\delta(t)] = 1$$

$$\therefore \delta_T(s) = \frac{1}{1 - e^{-ST}}$$

例：再求周期信号的拉氏变换

周期信号

$$f(t) = f_1(t) * \delta_T(t)$$

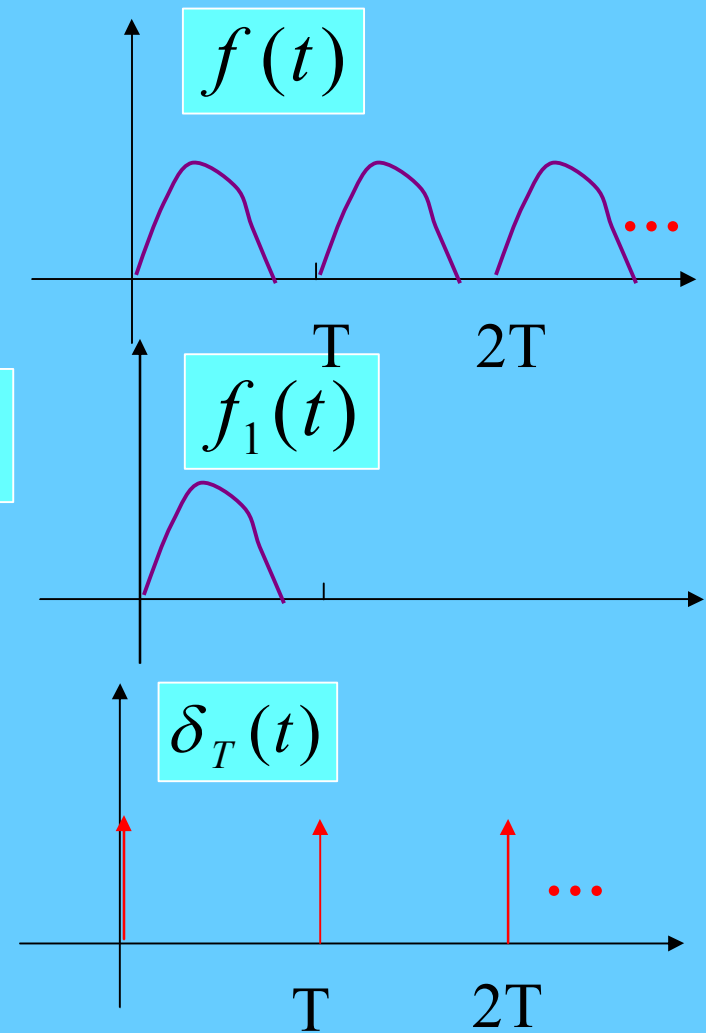
卷积定理

$$F(S) = F_1(S) \cdot LT[\delta_T(t)]$$

$$\therefore LT[\delta_T(t)] = \frac{1}{1 - e^{-ST}}$$

周期信号
拉氏变换为

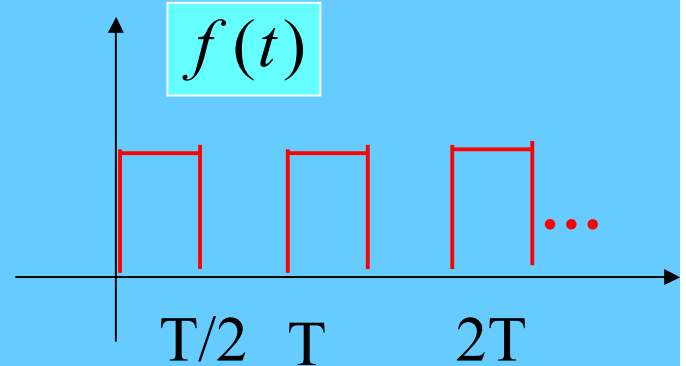
$$\therefore f(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{F_1(s)}{1 - e^{-ST}}$$



矩形周期信号拉氏变换

$$f_1(t) = u(t) - u(t - \frac{T}{2})$$

第一周期的
拉氏变换



$$F_1(s) = \frac{1}{S} (1 - e^{-ST/2})$$

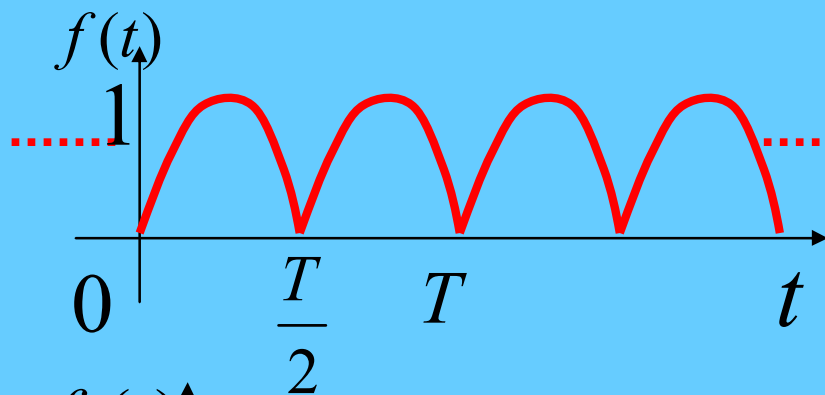
利用时移特性

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-ST}}$$
$$= \frac{1 - e^{-ST/2}}{S(1 - e^{-ST})}$$

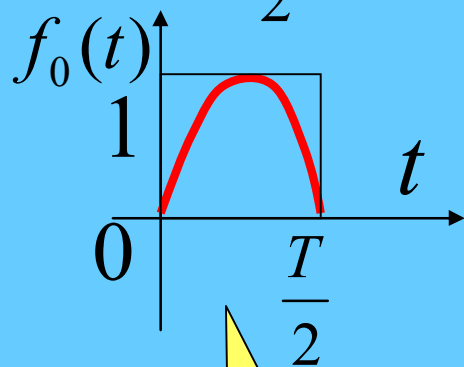
利用无穷级数求和

例1:

求周期信号的拉氏变换



$$\frac{\omega (1 + e^{-s \frac{T}{2}})}{S^2 + \omega^2} \frac{1}{1 - e^{-s \frac{T}{2}}}$$



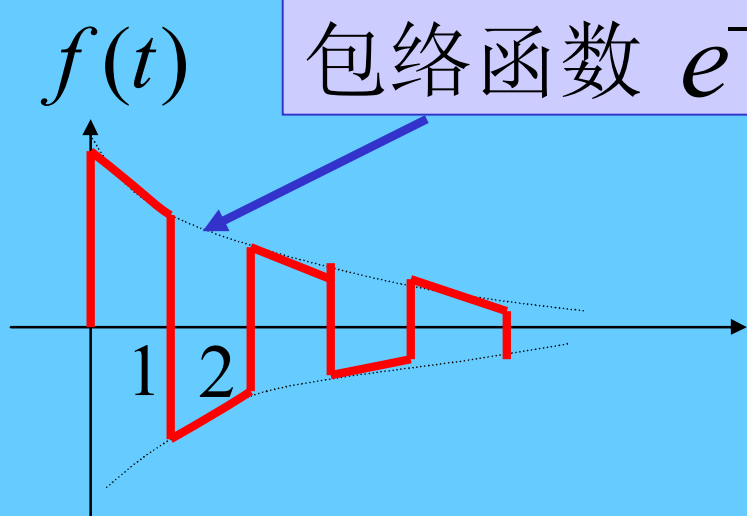
信号加窗
第一周期

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\sin \frac{2\pi}{T} t [u(t) - u(t - \frac{T}{2})]$$

$$\frac{\omega (1 + e^{-s \frac{T}{2}})}{S^2 + \omega^2}$$

例2



$$\frac{1}{(s+1)} \frac{(1-e^{-(s+1)})}{(1+e^{-(s+1)})}$$

乘衰减指数

周期对称方波

单对称方波

$$\frac{1}{s} (1-e^{-s})^2 \frac{1}{1-e^{-2s}} = \frac{(1-e^{-s})}{s(1+e^{-s})}$$

$$u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$$

$$\frac{1}{s} (1 - 2e^{-s} + e^{-2s})$$

抽样信号的拉氏变换

抽样序列

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

抽样序列的拉氏变换

时域抽样
信号

$$LT[\delta_T(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-SnT} = \frac{1}{1 - e^{-ST}}$$

$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = f(nT) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

抽样信号的
拉氏变换

$$F_s(s) = \int_0^{\infty} f(nT) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \cdot e^{-st} dt$$

$$F_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-SnT}$$

例：指数抽样序列的拉氏变换

$$f_s(t) = e^{-anT} \delta_T(t)$$

$$\text{解：} \because F_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-SnT}$$

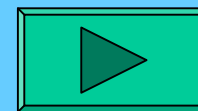
$$\therefore LT[f_s(t)] = F_s(s)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} e^{-SnT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(a+s)nT}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-(a+s)T}}$$

例：f(t)的拉氏变换为F(S),求其初值和终值

$$F(S) = \frac{1}{s+a}$$



解：f(t)的初值和终值

$$f(0^+) = \lim_{S \rightarrow \infty} SF(S) = \lim_{S \rightarrow \infty} S \frac{1}{s+a} = 1$$

$$f(\infty) = \lim_{S \rightarrow 0} SF(S) = \lim_{S \rightarrow 0} S \frac{1}{s+a} = 0$$

注意：f(t)=e^{-at}u(t), 若a>0,则终值为0
若a<0,则终值不存在

如果原信号是等幅震荡或增长的，
则其终值不存在。

HW1

5.1 (1,2,4,6)

5.2 (a,d,f)

5.3

5.4 (1,3,6,7)

5.5 (a,b)

5.9 (2, 6, 7, 10)

5.11

5.5 拉氏变换逆变换 Inverse Laplace Transform

1 部分分式展开法——有理分式 rational

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

极点：令 $D(s)$ 等于 0 的点

零点：令 $N(s)$ 等于 0 的点

例：求 $F(s) = \frac{s+4}{s^3+3s^2+2s}$ 的反变换。

解： $D(s) = s^3 + 3s^2 + 2s = s(s+1)(s+2)$

$N(s) = s + 4$ 极点 $0, -1, -2$, 零点 -4

部分分式展开：

$$F(s) = \frac{s+4}{s^3+3s^2+2s} = \frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

反变换 $: f(t) = LT^{-1}[F(s)]$

$$= 2 - 3e^{-t} + e^{-2t}, t > 0$$

2 性质，结合部分分式展开法 ——无理分式

例：求 $F(s) = \frac{se^{-3s}}{(s+1)(s+2)}$ 的原函数。

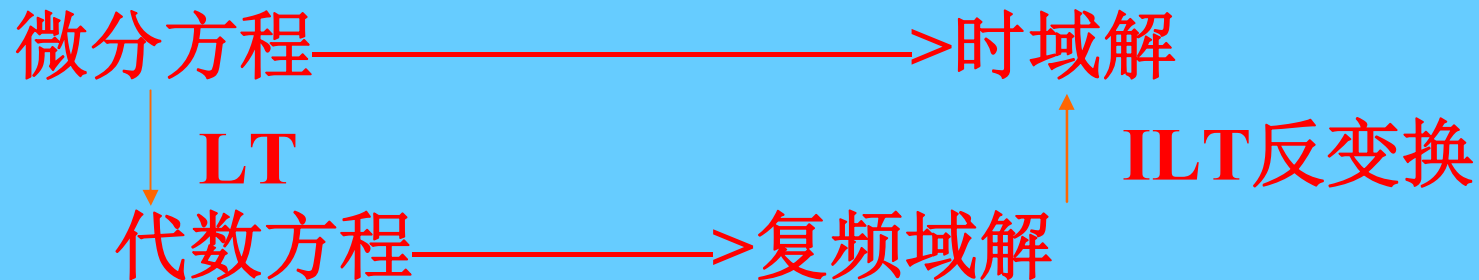
解：不是真分式，改写为 $F(s) = G(s)e^{-3s}$

$$\text{则： } G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)}$$

$$\begin{aligned} \text{反变换} \quad & : g(t) = LT^{-1}[G(s)] \\ & = -e^{-t} + 2e^{-2t}, t > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{反变换} \quad & : f(t) = LT^{-1}[F(s)] = g(t-3) \\ & = -e^{-(t-3)} + 2e^{-2(t-3)}, t > 3 \end{aligned}$$

5.6 用LT求解线性系统的响应



例1: LTI系统的微分方程为: $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = f(t)$

已知初始条件为 $y(0^-)=2$, $f(t)=u(t)$. 求方程的解。

解: 设 $LT[y(t)]=Y(S)$, $LT[f(t)]=F(S)$, 方程两边LT

$$SY(S) - y(0^-) + aY(S) = F(S)$$

$$\therefore Y(S) = \frac{1}{s+a} y(0^-) + \frac{1}{s+a} F(S)$$

$$\therefore Y(S) = \frac{2}{s+a} + \frac{1}{s+a} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{s+a} + \frac{1}{a} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right)$$

$$\therefore y(t) = 2e^{-at} + \frac{1}{a}(1 - e^{-at}) \quad t > 0$$

直接针对电路，利用**S域模型**：

电阻： $v_R(t) = R \cdot i_R(t)$

$V_R(S) = RI_R(S)$

电感： $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$

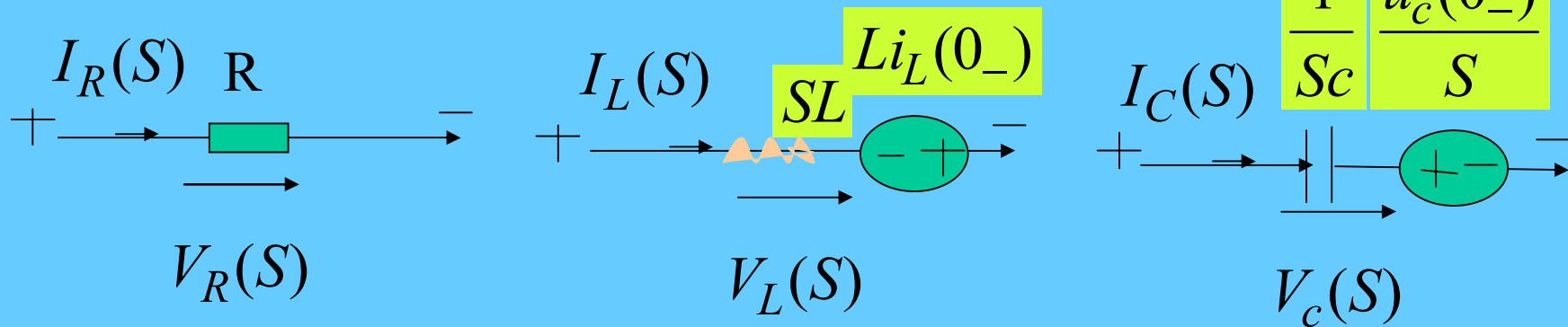
$V_L(S) = SLI_L(S) - Li_L(0_-)$

电容： $v_c(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t i_c(\tau) d\tau$

$V_c(S) = \frac{1}{Sc} I_c(S) + \frac{1}{S} v_c(0_-)$

SL：感抗， $Li_L(0_-)$ 内部象电压源，串联

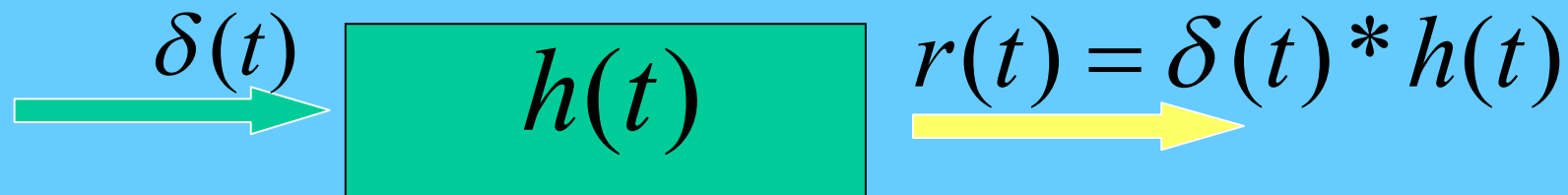
1/SC：容抗， $u_c(0_-)/S$ 内部象电压源，串联



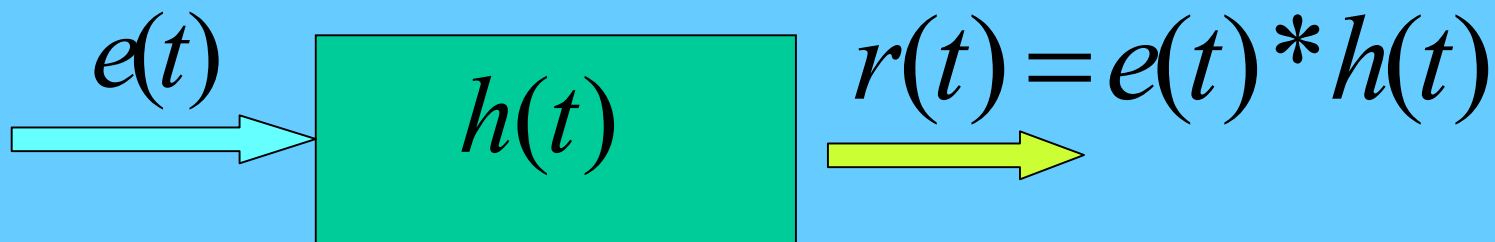
5.6 系统函数—系统的复频域特征

系统的时域特征

- 以单位冲激信号 $\delta(t)$ 作为激励时，系统产生的零状态响应，记作 $h(t)$ 。



- 任意时域信号激励时系统的响应

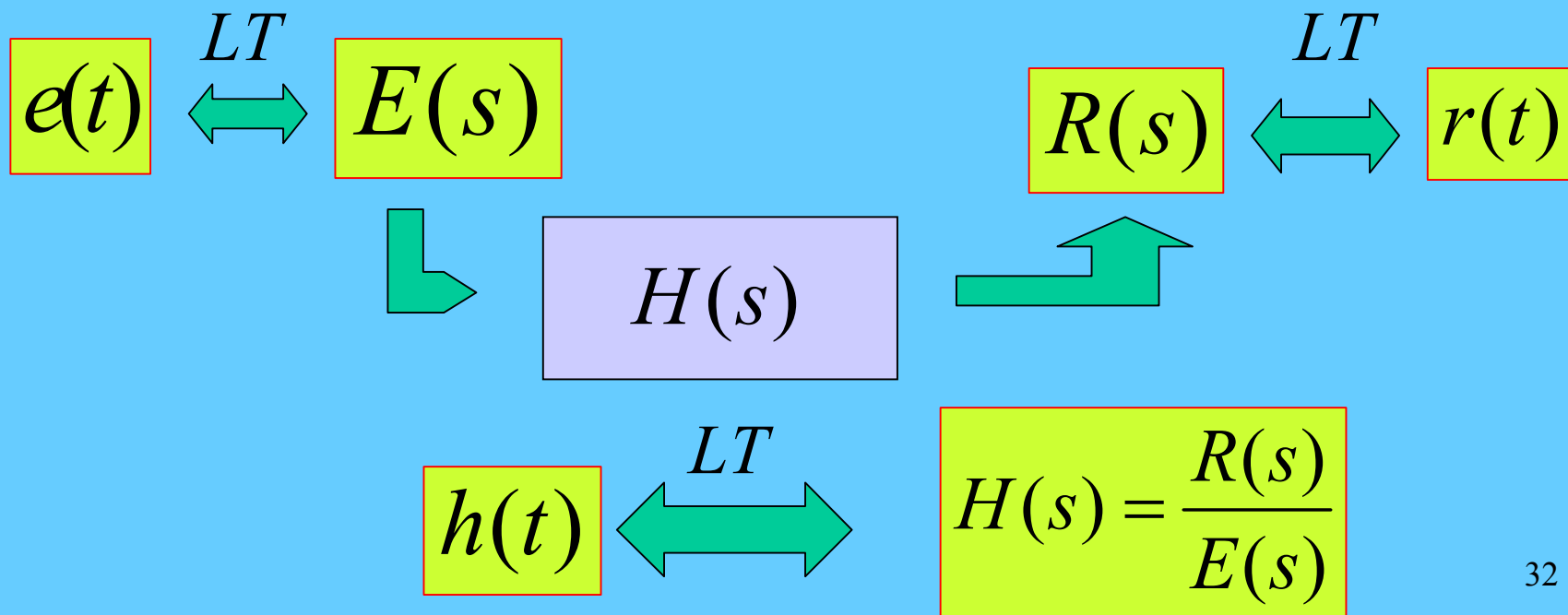


系统的复频域特征—系统函数 $H(s)$

$$r(t) = e(t) * h(t)$$

$$R(S) = E(S) \cdot H(S) \quad \therefore H(S) = \frac{R(S)}{E(S)}$$

- $H(s)$ 是 $h(t)$ 的拉氏变换
- $H(s)$ 是系统输出和输入各自拉氏变换的比

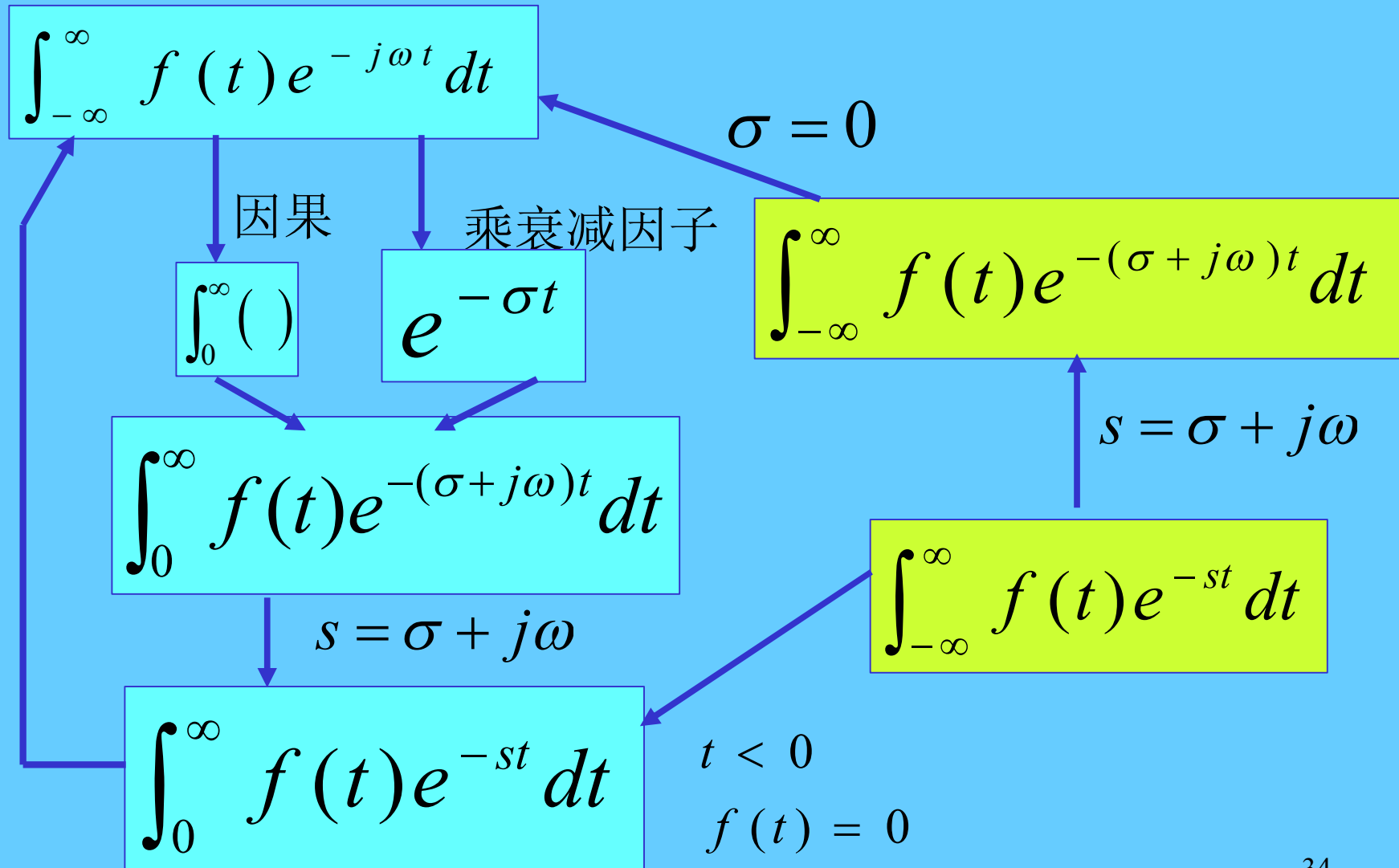


系统函数 $H(s)$ 的定义:

- 定义: 系统零状态响应的拉氏变换与激励的拉氏变换之比叫系统函数或网络函数

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)}$$

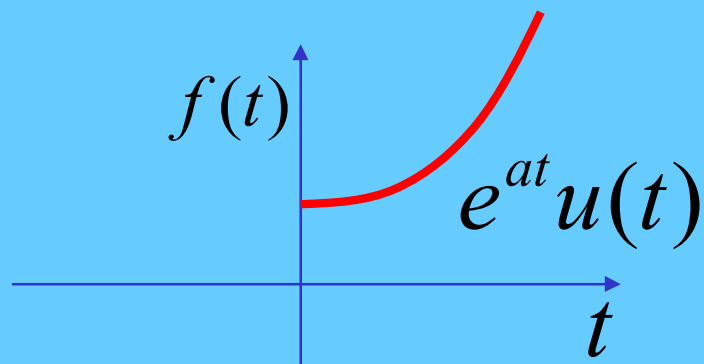
5.8 拉氏变换与傅氏变换的关系



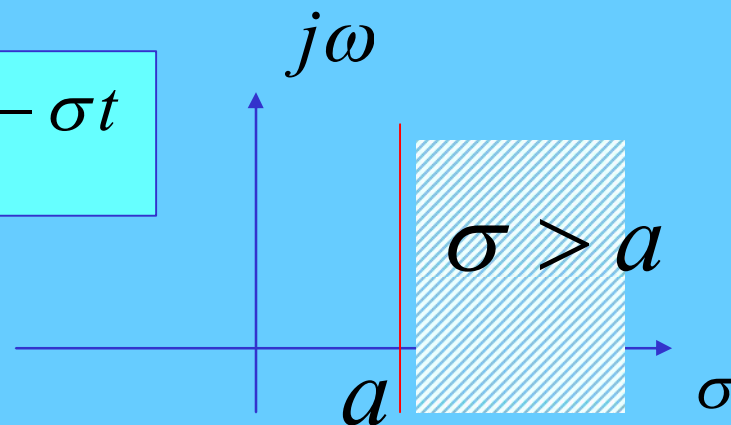
从单边拉氏变换到傅氏变换—有始信号

$$\begin{aligned} t < 0 \\ f(t) = 0 \end{aligned}$$

(1) $\sigma_0 > 0$, 发散的信号



$$\bullet e^{-\sigma t}$$



$$F(s) = \frac{1}{s - a}$$

收敛域不包含 $j\omega$ 轴，
仅由于衰减因子 $e^{-\sigma t}$ ，
使其拉氏变换存在

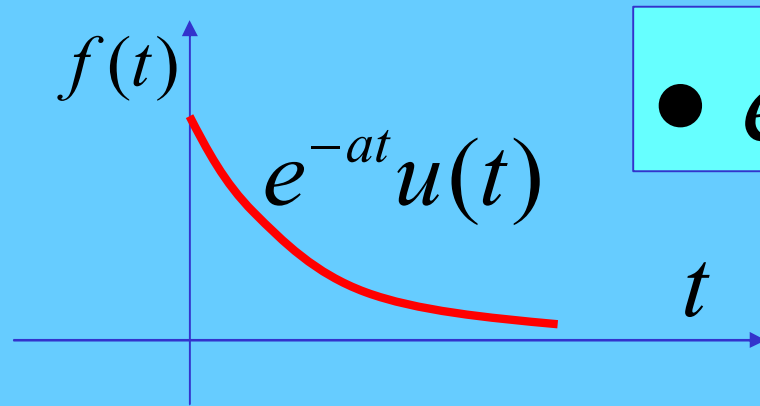
发散信号：傅氏变换不存在，

拉氏变换存在

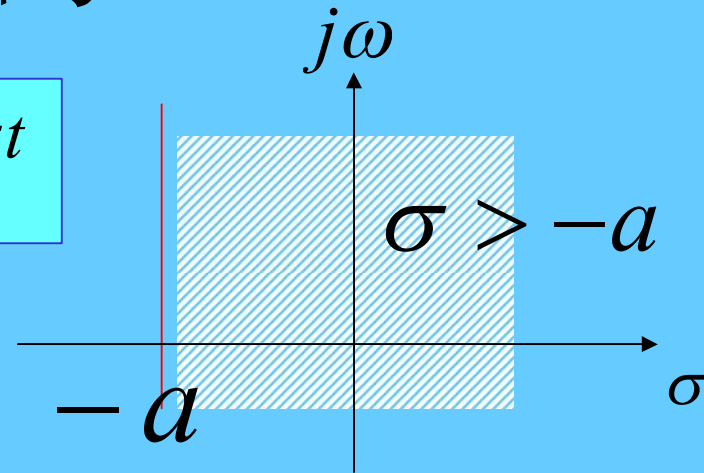
从单边拉氏变换到傅氏变换—有始信号

$$\begin{matrix} t < 0 \\ f(t) = 0 \end{matrix}$$

(2) $\sigma_0 < 0$, 衰减的信号



$$\bullet e^{-\sigma t}$$



收敛域包含 $j\omega$ 轴，其付式、拉式变换都存在， $S \longrightarrow j\omega$

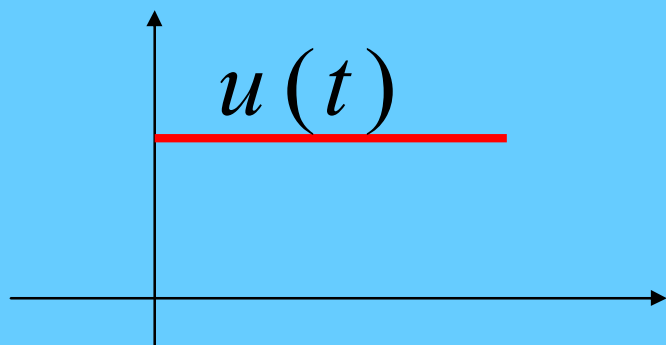
$$F(s) = \frac{1}{s+a} \xrightarrow{s=j\omega} F(j\omega) = \frac{1}{j\omega+a}$$

从单边拉氏变换到傅氏变换—有始信号

$$t < 0$$

$$f(t) = 0$$

(3) $\sigma_0 = 0$, 收敛边界为虚轴



存在傅氏变换，但不收敛于虚轴，不能简单用 $= j\omega$ ，要包含奇异函数项。

$$F(s) = \frac{1}{s}$$



$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

$$F(j\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega} + \pi \sum_n k_n \delta(\omega - \omega_n)$$

$K_1=1$

从 $\sin \omega_0 t \cdot u(t)$ 的单边拉氏变换求它的傅氏变换

$$f(t) = \sin \omega_0 t \cdot u(t) \xleftrightarrow{LT} F(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$F(j\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega} + \pi \sum_n k_n \delta(\omega - \omega_n)$$

~~$$F(j\omega) = \frac{\omega_0}{(j\omega)^2 + \omega_0^2}$$~~

K₁

$$F(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{j/2}{s + j\omega_0} - \frac{j/2}{s - j\omega_0}$$

K₂

$$F(j\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} + j \frac{\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

HW2

5.15

5.22

5.24

5.28